解答例

STEP I 2019、第 11 問

確率・統計 ・ 幾何分布

> **STEP I 2019、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.9 節「偏った硬貨から公平な判定を」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/von-neumann.html

鍵となる考え方

2 人で行う手順の各ラウンドは、そこで決着がつくかつかないかのどちらかである独立（independent）な試行である。したがって、決着がつくラウンドは幾何分布（geometric distribution）に従う。「p の値にかかわらず」成り立つ評価は、$p+q=1$ のとき pq がどこまで大きくなりうるかという問題に帰着し、それには相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）が答えてくれる。小問 (ii) では第 2 ラウンドはもはや新たな出発点ではないので、第 1 ラウンドで何が起きたかによって場合分けをし、同じ pq の評価で仕上げる。

解答

小問 (i)

どの 1 つのラウンドでも、2 枚の硬貨は独立である。決着がつくのは、両方が表（確率 p^2）または両方が裏（確率 q^2）のときであるから、

$$\mathrm{P}(\text{特定のラウンドで決着}) = p^2 + q^2, \qquad \mathrm{P}(\text{決着せず}) = pq + qp = 2pq.$$

確認として、$p^2+q^2+2pq=(p+q)^2=1$ である。

毎回新たに硬貨を投げるので、各ラウンドは独立である。第 n ラウンドで決着がつくとは、決着のつかないラウンドが $n-1$ 回続き、その後に決着のつくラウンドが 1 回

来ることであるから、

$$\mathrm{P}(\text{決着がラウンド}n) = (2qp)^{n-1}(q^2+p^2),$$

となり、求める結果が得られる。

2 つ目の結果については、余事象（complement）を使うのが最も簡単である。第 n ラウンドまでに決着がつかないとは、決着のつかないラウンドが n 回続くことであり、その確率は $(2pq)^n$ である。よって

$$\mathrm{P}(\text{決着がラウンド 1 〜}n) = 1-(2pq)^n.$$

（$p^2+q^2 = 1-2pq$ を用いて等比級数（geometric series）$\sum_{r=1}^{n}(p^2+q^2)(2pq)^{r-1}$ を計算しても同じ結果が得られる。）

次に、すべての p について成り立つ pq の上界（upper bound）が必要である。$p, q \geq 0$ であるから、相加平均・相乗平均の不等式により

$$\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{よって} \qquad pq \leq \frac{1}{4},$$

であり、等号が成り立つのはちょうど $p = q = \frac{1}{2}$ のときである。（同値な言い方をすれば、$pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - (p-\frac{1}{2})^2$ である。）したがって $0 \leq 2pq \leq \frac{1}{2}$ であるから $(2pq)^n \leq \frac{1}{2^n}$ となり、

$$\mathrm{P}(\text{決着がラウンド 1 〜}n) = 1-(2pq)^n \geq 1-\frac{1}{2^n}$$

がすべての p の値について成り立つ。これが示すべきことであった。公平な硬貨が最悪の場合である。

小問 (ii)

第 1 ラウンドで決着がつく事象を D_1、第 2 ラウンドで決着がつく事象を D_2 とする。これらの事象は互いに排反（mutually exclusive）であるから、求めるのは $\mathrm{P}(D_1)+\mathrm{P}(D_2)$ である。

第 1 ラウンド。 3 枚とも表か 3 枚とも裏であればよいので、$\mathrm{P}(D_1) = p^3+q^3$ である。

第 2 ラウンド。 第 1 ラウンドで決着がつかなかった場合、硬貨は表 2 枚と裏 1 枚、または裏 2 枚と表 1 枚であった。

- **表 2 枚、裏 1 枚**（3 人のうち誰が裏を出してもよいので、確率は $3p^2q$）。表を出した 2 人がもう一度投げ、3 人目は裏の硬貨をひっくり返して表にする。このとき 3 枚とも裏になることはありえず、3 枚とも表になるのは新たに投げた 2 枚がともに表になるときに限られ、その確率は p^2 である。この場合の寄与は $3p^2q \cdot p^2 = 3p^4q$ である。

- **裏 2 枚、表 1 枚**（確率 $3pq^2$）。同様の議論により、3 枚目の硬貨は裏になっており、新たに投げた 2 枚がともに裏になる必要がある。その確率は q^2 である。この場合の寄与は $3pq^2 \cdot q^2 = 3pq^4$ である。

第 2 ラウンドの硬貨投げは第 1 ラウンドと独立であり、だからこそ確率を掛け合わせることができる。よって

$$\mathrm{P}(D_2) = 3p^4q + 3pq^4 = 3pq\,(p^3 + q^3).$$

考えてみよう $p^3+q^3+3pq(p^3+q^3)$ をうまく整理する方法はないだろうか？

$p^3 + q^3$ をくくり出し、$p + q = 1$ のもとで 3 乗の和の公式を使う：

$$p^3 + q^3 = (p+q)(p^2 - pq + q^2) = (p+q)^2 - 3pq = 1 - 3pq.$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{第 2 ラウンドまでに決着}) &= (p^3+q^3)(1+3pq)\\ &= (1-3pq)(1+3pq)\\ &= 1 - 9p^2q^2.\end{aligned}$$

小問 (i) より $0 \le pq \le \frac{1}{4}$ であるから $p^2q^2 \le \frac{1}{16}$ となり、

$$\mathrm{P}(\text{第 2 ラウンドまでに決着}) \ge 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

が p の値にかかわらず成り立ち、等号は $p = \frac{1}{2}$ のときに成り立つ。以上で証明が完了する。

検算

- $p = 1$（両面とも表の硬貨）のときは、ただちに決着がつく。小問 (i) では $1 - (2pq)^n = 1$、小問 (ii) では $1 - 9p^2q^2 = 1$ となり、当然そうなるべき値になっている。
- 小問 (ii) で $p = \frac{1}{2}$ のとき：第 1 ラウンドで決着がつく確率は $\frac{1}{4}$ である。そうでない場合（$\frac{3}{4}$）、第 2 ラウンドで決着がつく確率は $\frac{1}{4}$ であるから、$\frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$ となり、評価の等号が実際に達成される。
- $p = 0.3$ のとき、公式は $1 - 9(0.21)^2 = 0.6031$ を与える。3 人で行う手順を 200 000 回コンピュータでシミュレーションしたところ、0.602 が得られた。

よくある間違い

- 小問 (ii) の第 1 ラウンドで、誰が 1 人だけ違う面を出すかに対応する因数 3 を忘れる。
- 小問 (ii) の第 2 ラウンドを、新たに 3 枚の硬貨を投げるラウンドのように扱う。ひっくり返した硬貨は固定されているので、「3 枚とも表」と「3 枚とも裏」のうち一方しか起こりえない。
- $p = \frac{1}{2}$ の場合だけで評価を証明する。**すべての** p について $pq \leq \frac{1}{4}$ が必要であり、それを与えてくれるのが相加平均・相乗平均の不等式のような不等式である。

STEP のその先へ

小問 (i) は、偏りのある硬貨から公平な決定を得るための古典的な技法であり、通常はフォン・ノイマン（von Neumann）によるものとされている。2 人で行う手順では、「ホテル」と「喫茶店」が同様に確からしくなるのは $p = \frac{1}{2}$ のときに限られるが、1 人が 2 回投げて HT と TH を結果として用いれば、すべての p について公平な結果が得られる。決着がつくまでのラウンド数は幾何分布に従う確率変数（random variable）であり、このような手順がどれだけ速く終わるかという問題は、停止時刻（stopping times）とマルコフ連鎖（Markov chains）の研究へとつながっていく。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）はその両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。