解答例

STEP I 2019、第 10 問

力学 ・ 放物運動

STEP I 2019、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：

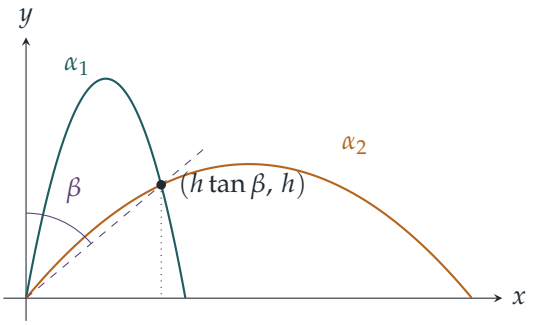
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

軌道の方程式を x を用いた y の式として書き下し、与えられた定点を代入する。そこで $1/\sin^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$ を用いると、これが $c = \cot\alpha$ についての 2 次方程式（quadratic）になることに気づく。その後、(i) はすべて 2 次方程式の代数で処理できる。解と係数の関係（sum and product of roots）から cot の加法定理（addition formula）を通じて $\alpha_1 + \alpha_2$ が得られ、「異なる 2 つの解をもつ」ことは判別式（discriminant）の条件となる。小問 (ii) は、エネルギー（あるいは $v^2 = u^2 + 2as$）を用いた 1 行の議論で済む。

解答

粒子は空気抵抗のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（point mass）としてモデル化する。角 α は鉛直上向きから測るので、初速度の水平成分は $u\sin\alpha$、鉛直成分は $u\cos\alpha$ である。



図は、この点を通る 2 つの可能な軌道を示している（$\beta = 50°$、$k = 8$ の場合を描いた）。

この点は、O を通り鉛直方向と角 β をなす直線上にある。

小問 (i)

時刻 t において

$$x = ut\sin\alpha, \qquad y = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$0 < \beta < 90^\circ$ より、この点は $x > 0$ を満たすので $\sin\alpha \neq 0$ であり、$t = x/(u\sin\alpha)$ として t を消去できる：

$$y = x\cot\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\sin^2\alpha} = cx - \frac{gx^2}{2u^2}(1+c^2),$$

ここで $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$ を用いた。次に $x = h\tan\beta$、$y = h$ を代入し、$h > 0$ で割ると

$$1 = c\tan\beta - \frac{gh}{2u^2}\tan^2\beta\,(1+c^2) = c\tan\beta - \frac{\tan^2\beta}{k}(1+c^2).$$

両辺に $k\cot^2\beta$ を掛けると $k\cot^2\beta = ck\cot\beta - 1 - c^2$、すなわち

$$c^2 - ck\cot\beta + 1 + k\cot^2\beta = 0, \qquad (*)$$

となり、示すべき式が得られた。

(a) 2 つの値 $c_1 = \cot\alpha_1$ と $c_2 = \cot\alpha_2$ は、c についての 2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解である（cot は $(0,\pi)$ 上で単射（one-to-one）なので、これらは相異なる）。したがって、解と係数の関係より

$$\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 = k\cot\beta, \qquad \cot\alpha_1\cot\alpha_2 = 1 + k\cot^2\beta.$$

1 つ目の式が第 1 の結果である。第 2 の結果については、cot の加法定理を用いる：

$$\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{\cot\alpha_1\cot\alpha_2 - 1}{\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2} = \frac{k\cot^2\beta}{k\cot\beta} = \cot\beta.$$

考えてみよう $\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \cot\beta$ から本当に $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ が導かれるだろうか？

それだけでは導かれない。cot は周期 180° をもつので、$\alpha_1 + \alpha_2$ の範囲も確定させる必要がある。ここでは和 $k\cot\beta$ と積 $1 + k\cot^2\beta$ はともに正である（$k > 0$ かつ $\cot\beta > 0$ であるから）。よって 2 つの解 c_1, c_2 はともに正である。したがって両方の角は鋭角であり、$0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 180^\circ$ となる。この区間で cot は単射である。β もこの区間に属するので、$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ である。

(b) c が相異なる 2 つの実数値をとるためには、$(*)$ の判別式が正でなければならない：

$$k^2\cot^2\beta - 4(1 + k\cot^2\beta) > 0.$$

$\tan^2\beta > 0$ を掛けると

$$k^2 - 4k - 4\tan^2\beta > 0.$$

左辺の k についての 2 次式の解は $k = 2 \pm \sqrt{4 + 4\tan^2\beta} = 2 \pm 2\sec\beta$ である（$1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$ と $\sec\beta > 0$ を用いた）。よってこの不等式が成り立つのは、$k < 2 - 2\sec\beta$ または $k > 2 + 2\sec\beta$ のときであり、かつそのときに限る。しかし $\sec\beta > 1$ より $2 - 2\sec\beta < 0 < k$ であるから、前者は起こりえない。したがって

$$k > 2(1 + \sec\beta).$$

小問 (ii)

粒子は高さ $h > 0$ まで上昇しなければならないので、初速度の鉛直成分 $u\cos\alpha$ は正である。鉛直方向の運動は一定の加速度 $-g$ をもち、最高点で鉛直方向の速度は 0 となるので、$v^2 = u^2 + 2as$ より最高点の高さは

$$H = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}.$$

粒子は高さ h の点を通過するので、$H \geq h$ である：

$$\frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} \geq h \quad\Longrightarrow\quad \frac{2u^2}{gh}\cos^2\alpha \geq 4 \quad\Longrightarrow\quad k \geq 4\sec^2\alpha,$$

ここで $4/(gh) > 0$ を掛け、さらに $\cos^2\alpha > 0$ で割った。等号が成り立つのは、点 $(h\tan\beta, h)$ が軌道の最高点であるときであり、かつそのときに限る。

検算

- $\beta = 50°$、$k = 8$ とする。このとき $2(1 + \sec 50°) \approx 5.11 < 8$ なので、2 つの角が存在する。$(*)$ を解くと $\alpha_1 \approx 10.29°$、$\alpha_2 \approx 39.71°$ となり、和は $50°$ である。運動を数値的に時間発展させると、どちらの軌道も $x = h\tan\beta$ において高さ $1.0000\,h$ に達する。
- これらの角について $k\cos^2\alpha \approx 7.74$ および 4.73 であり、(ii) が要求するとおり、どちらも 4 以上である。
- 無作為に選んだ数千組の β、h、k についてコンピュータで確認したところ、$(*)$ が相異なる 2 つの解をもつのはちょうど $k > 2(1 + \sec\beta)$ のときであり、毎回 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ が成り立つことが確かめられた。
- 単位：$u^2/(gh)$ は無次元量（dimensionless）であり、k はそうでなければならない。

よくある間違い

- 習慣で α を水平方向から測ってしまうこと。ここでは水平成分は $u\sin\alpha$ であり、$u\cos\alpha$ ではない。
- 両方の角が鋭角であることを示さずに、$\cot(\alpha_1+\alpha_2)=\cot\beta$ から $\alpha_1+\alpha_2=\beta$ と結論づけること。
- (b) において、負である解 $k<2-2\sec\beta$ を残してしまうこと。

STEP のその先へ

$\alpha_1+\alpha_2=\beta$ という結果は、2 つの発射方向が、鉛直方向と目標点への直線とがなす角の二等分線に関して対称であることを意味している。これは「安全放物線（parabola of safety）」に関する古典的な事実である。安全放物線とは速さ u のすべての軌道の包絡線（envelope）のことであり、2 つの解が一致する境界の場合 $k=2(1+\sec\beta)$ にあたる。曲線族の包絡線は、微積分と幾何学を結びつける、大学 1 年次にふさわしい面白い題材である。この流れの力学をさらに学びたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。