解答例

STEP I 2019、第 1 問

純粋数学 ・ 三角関数の最適化

> **STEP I 2019、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては直線が座標軸と交わる位置から導かれる。周の長さ（perimeter）については、定点 $P = (1, k)$ が斜辺（hypotenuse）XY を二つの部分に分け、そのそれぞれが一辺の長さのわかっている小さな直角三角形（right-angled triangle）の斜辺になっている。そのため、平方根を展開する必要はない。最小値については、面積は積が一定である二つの項の和（相加相乗平均（AM–GM）が使える状況）であり、周の長さの導関数（derivative）は $\cos^2\theta = (1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)$ を用いると見事に簡単になる。

解答

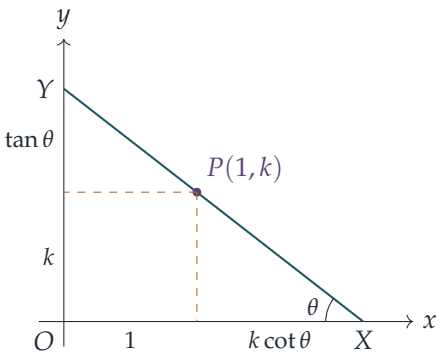
$(1, k)$ を通り傾き $-\tan\theta$ の直線は

$$y - k = -\tan\theta\,(x - 1).$$

である。$y = 0$ とおくと $x - 1 = k\cot\theta$ が得られ、$x = 0$ とおくと $y = k + \tan\theta$ が得られるので、

$$X = (1 + k\cot\theta,\ 0), \qquad Y = (0,\ k + \tan\theta).$$

となる。$k > 0$ かつ $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ であるから、二つの切片（intercept）はともに正であり、OXY は第 1 象限にあるまっとうな直角三角形で、$P = (1, k)$ はその斜辺上にある。



小問 (i)

この三角形は O で直角をなすので、

$$A = \tfrac{1}{2}(1 + k\cot\theta)(k + \tan\theta) = \tfrac{1}{2}\left(k + \tan\theta + k^2\cot\theta + k\right)$$
$$= k + \tfrac{1}{2}\left(\tan\theta + k^2\cot\theta\right),$$

となる。ここで $\cot\theta\tan\theta = 1$ を用いた。

最小値を求める。$\tan\theta$ と $k^2\cot\theta$ はともに正であり、その積は定数 k^2 である。相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）により、

$$\tan\theta + k^2\cot\theta \geq 2\sqrt{\tan\theta \cdot k^2\cot\theta} = 2k,$$

であり、等号が成り立つのは $\tan\theta = k^2\cot\theta$、すなわち $\tan\theta = k$ のときに限る（$k > 0$ であるから、これは範囲内のある θ で実現される）。したがって $A \geq k + k = 2k$ であり、

$$A_{\min} = 2k.$$

である。（微分しても同じ結果が得られる：$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}(\sec^2\theta - k^2\operatorname{cosec}^2\theta) = 0$ となるのは $\tan^2\theta = k^2$ のときである。）最小のとき $X = (2, 0)$、$Y = (0, 2k)$ であるから、P は XY の中点（midpoint）である。

小問 (ii)

直角をはさむ二辺は $OX = 1 + k\cot\theta$ と $OY = k + \tan\theta$ である。斜辺については、図のように P で二つに分ける。

- P から Y まで：水平方向の移動量は 1 であり、直線は水平方向と角 θ をなすので、$PY = 1/\cos\theta = \sec\theta$ である。
- P から X まで：鉛直方向の下がり幅は k であるので、$PX = k/\sin\theta = k\operatorname{cosec}\theta$ である。

四つの長さを足し合わせると、

$$L = 1 + \tan\theta + \sec\theta + k\big(1 + \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta\big),$$

となり、示すべき式が得られた。

考えてみよう 導関数には $\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta$ が含まれる。これを 0 とおく前に、ずっと簡単な形にする方法はないだろうか？

ある。項ごとに微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta - k\big(\operatorname{cosec}^2\theta + \operatorname{cosec}\theta\cot\theta\big) = \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} - k\,\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

となる。ここで $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$、$\sin^2\theta = (1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$ であり、$1+\sin\theta$、$1+\cos\theta$ は 0 でないので、約分できる：

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{1-\sin\theta} - \frac{k}{1-\cos\theta}.$$

これが 0 になるのは、ちょうど $1-\cos\theta = k(1-\sin\theta)$ のときである。よって最小値は $\theta = \alpha$ でとられ、

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = k,$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。（実際、この停留点（stationary point）はただ一つであり、最小点である：θ が $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加するにつれて、$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$ の第 1 項は増加し、第 2 項は減少する。したがって $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$ は増加関数であり、負から正へちょうど一度だけ符号を変える。）

考えてみよう 最小値から k を消去するにはどうすればよいだろうか？

L の項を通分してまとめる：

$$1 + \tan\alpha + \sec\alpha = \frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}, \qquad 1 + \cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$s = \sin\alpha$、$c = \cos\alpha$ とおき、$k = \dfrac{1-c}{1-s}$ とすると、第 2 の部分は

$$k\,\frac{1+s+c}{s} = \frac{(1+s+c)(1-c)}{s(1-s)} = \frac{1+s-sc-c^2}{s(1-s)} = \frac{s^2+s-sc}{s(1-s)} = \frac{1+s-c}{1-s},$$

となる。ここで $1-c^2 = s^2$ を用いた。したがって

$$\begin{aligned} L_{\min} = \frac{1+s+c}{c} + \frac{1+s-c}{1-s} &= \frac{(1+s+c)(1-s)+c(1+s-c)}{c(1-s)} \\ &= \frac{1-s^2+c-sc+c+sc-c^2}{c(1-s)} \\ &= \frac{2c}{c(1-s)}, \end{aligned}$$

である。$1 - s^2 - c^2 = 0$ だからである。よって

$$L_{\min} = \frac{2}{1 - \sin\alpha}.$$

である。

検算

$k = 1$ とする。このとき $\tan\theta = 1$ から $X = (2,0)$、$Y = (0,2)$、$A = 2 = 2k$ となり、予想どおりである。周の長さの条件 $(1 - \cos\alpha)/(1 - \sin\alpha) = 1$ からは $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ が得られ、$2/(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6.828$ となる。これは頂点が $(0,0)$、$(2,0)$、$(0,2)$ の三角形の周の長さ $2 + 2 + 2\sqrt{2}$ にちょうど等しい。ほかのさまざまな k の値についても、θ をコンピュータで探索することにより、二つの最小値と周の長さが最小となる位置の両方が確認された。

よくある間違い

- 斜辺を P で分けずに、$\sqrt{(1 + k\cot\theta)^2 + (k + \tan\theta)^2}$ を展開してしまう。
- 簡単にしていない導関数を 0 とおいて、計算の中で迷子になる。先に $1 + \sin\theta$ と $1 + \cos\theta$ を約分すること。
- 最終的な答えに k を残してしまう。問題が求めているのは α だけで表した最小値である。

STEP のその先へ

この簡潔な答えには幾何学的な説明がある。P を通り周の長さを最小にする直線は、両座標軸に接する円（OXY の傍接円（excircle））に P で接する直線であり、このとき周の長さは O からその円に引いた接線の長さの 2 倍になる。この円は P を通る半径 r の円で、$r = 1/(1 - \sin\alpha)$ である。「直線が P を通る」といった制約条件のついた最適化問題（optimisation problem）は、大学 1 年の微積分の講義で学ぶラグランジュの未定乗数法（Lagrange multipliers）の出発点である。このような趣旨の問題をさらに多く知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。