解答例

STEP III 2018、第 9 問

力学 ・ 衝突と漸化式

> **STEP III 2018、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q9

鍵となる考え方

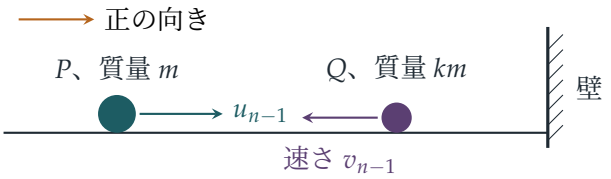
P と Q の各衝突からは、衝突前後の速度を結ぶ 2 つの一次方程式が得られる。1 つは運動量保存則（conservation of momentum）から、もう 1 つはニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）から得られる。壁は Q の速度の向きを逆にするだけなので、ある衝突の直前の状態は、その 1 つ前の衝突の直後の状態で決まる。こうして u_n と v_n に関する 1 階の連立漸化式（recurrence relation）が得られ、v を消去すると u_n に関する 1 本の 2 階漸化式が残る。小問 (ii) は、線形漸化式の解を最初の 2 項に合わせるという、いつもの作業である。

解答

P と Q を、なめらかな床の上で一直線上を動く質点（particle）としてモデル化する。したがって衝突と衝突の間には水平方向の力ははたらかず、各質点は一定の速度を保つ。全体を通して、壁に向かう向きを正とする。

衝突と衝突の間に起こること。 n 回目の衝突の後、Q の速度は v_n である（次に壁と衝突するので、壁に向かう向きである）。壁との衝突は完全弾性衝突（perfectly elastic collision）なので、Q は速度 $-v_n$ で跳ね返り、一方 P の速度は u_n のままである。よって $n+1$ 回目の衝突の直前の速度は、u_n（P）と $-v_n$（Q）である。

v_0 を正しく解釈すれば、これは最初の衝突についても成り立つ。最初の衝突の前、Q は速さ v_0 で壁から遠ざかっているので、その速度は $-v_0$ であり、これはまさに上のパターンで $n=0$ としたものである。



小問 (i)

n 回目の衝突（$n \geq 1$）について、運動量保存則から（両辺を m で割って）次を得る。

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = u_n + kv_n. \tag{1}$$

近づく速さは $u_{n-1} - (-v_{n-1}) = u_{n-1} + v_{n-1}$ である。衝突後、壁に近い側にある Q は P より速く壁に向かって動くので、遠ざかる速さは $v_n - u_n$ である。ニュートンの反発の法則より

$$v_n - u_n = e\,(u_{n-1} + v_{n-1}). \tag{2}$$

(2) から得られる v_n を (1) に代入すると

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = (1+k)u_n + ke\,(u_{n-1} + v_{n-1}),$$

よって

$$k(1+e)\,v_{n-1} = (1-ke)\,u_{n-1} - (1+k)\,u_n \qquad (n \geq 1). \tag{3}$$

これは各 v を連続する 2 つの u で表しており、まさに v を消去するのに必要なものである。

考えてみよう 式 (3) で v_{n-1} は消せるが、(2) には v_n も含まれている。これはどう扱えばよいだろうか？

式 (3) はすべての $n \geq 1$ で成り立つので、n を $n+1$ に置き換えて使うこともできる。

$$k(1+e)\,v_n = (1-ke)\,u_n - (1+k)\,u_{n+1}.$$

そこで (2) に $k(1+e)$ を掛け、$k(1+e)v_n$ と $k(1+e)v_{n-1}$ の両方をこれらの式で置き換えると

$$(1-ke)u_n - (1+k)u_{n+1} - k(1+e)u_n = ke(1+e)\,u_{n-1} + e[(1-ke)u_{n-1} - (1+k)u_n].$$

項を整理する。右辺の u_{n-1} の係数は $ke + ke^2 + e - ke^2 = e(1+k)$ である。u_n の項を左辺に移すと、その係数は

$$1 - ke - k - ke + e + ke = 1 - k + e - ke = (1+e)(1-k).$$

したがって

$$(1+k)u_{n+1}-(1-k)(1+e)u_n+e(1+k)u_{n-1}=0 \qquad (n\geq 1),$$

となり、n を $n-1$ に置き換えると、$n\geq 2$ に対する $(*)$ が得られる。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

$e=\frac{1}{2}$、$k=\frac{1}{34}$ のとき、$(*)$ に 68 を掛けると

$$70u_n-99u_{n-1}+35u_{n-2}=0,$$

となる。その特性方程式（auxiliary equation）$70t^2-99t+35=(10t-7)(7t-5)=0$ の解は $\frac{7}{10}$ と $\frac{5}{7}$ であり、与えられた形と一致する。

A と B を決めるには 2 つの条件、すなわち最初の 2 項が必要である。u_0 は既知である。u_1 については、(3) で $n=1$ とする。

$$(1+k)u_1=(1-ke)u_0-k(1+e)v_0,$$
$$\text{よって}\quad \tfrac{35}{34}u_1=\tfrac{67}{68}u_0-\tfrac{3}{68}v_0,\quad \text{したがって}\quad u_1=\frac{67u_0-3v_0}{70}.$$

与えられた形に $n=0$ と $n=1$ を代入すると

$$A+B=u_0,\qquad \tfrac{7}{10}A+\tfrac{5}{7}B=\frac{67u_0-3v_0}{70}.$$

2 番目の式に 70 を掛けると $49A+50B=67u_0-3v_0$ となる。ここから 1 番目の式の 49 倍を引くと

$$B=18u_0-3v_0,\qquad A=u_0-B=3v_0-17u_0.$$

n が大きいときの u_n の符号。 $\frac{5}{7}>\frac{7}{10}$（$50>49$ より）なので、B の項が支配的である。正確には

$$u_n=\left(\tfrac{5}{7}\right)^n\left[B+A\left(\tfrac{49}{50}\right)^n\right],$$

であり、$\left(\frac{49}{50}\right)^n\to 0$ なので、括弧内は B に収束（converge）する。$0<6u_0<v_0$ ならば $B=3(6u_0-v_0)<0$ なので、十分大きなすべての n に対して括弧内は負である。$\left(\frac{5}{7}\right)^n>0$ なので、n が大きいとき u_n は負となり、示すべきことが示された。（具体的には、$|A|(\frac{49}{50})^n<|B|$ となれば括弧内は負である。）

物理的には、P は最終的に壁から遠ざかる向きに跳ね返される。Q ははるかに軽いにもかかわらず、P に対して十分な初速をもつので、Q は相手を押し戻し続けるのである。

検算

- $e = 1$、$k = 1$（質量が等しく、完全弾性衝突）とすると、$(*)$ は $2u_n + 2u_{n-2} = 0$ となるので、$u_n = -u_{n-2}$ である。実際、等しい質量の物体が弾性衝突すると速度が入れ替わるので、$u_1 = -v_0$、$u_2 = -v_1$ である。そして Q は P のもとの速度 u_0 を壁まで運んで戻ってくるので、$u_2 = -u_0$ となる。
- $n = 0$ のとき公式は $A + B = u_0$ を与え、$n = 1$ のときは

$$\tfrac{7}{10}(3v_0 - 17u_0) + \tfrac{5}{7}(18u_0 - 3v_0) = \tfrac{1}{70}(67u_0 - 3v_0),$$

  を与え、期待どおりである。
- $u_0 = 1$、$v_0 = 7$ とすると $A = 4$、$B = -3$ である。衝突を 1 回ずつ順に計算すると公式が正確に成り立つことが確かめられ、u_n は $n = 15$ で初めて負になり、そのとき $u_{15} \approx -0.00029$ である。

よくある間違い

- 衝突直前の Q の速度は v_{n-1} ではなく $-v_{n-1}$ であることを忘れる。壁が向きを逆にするからである。
- 反発の式で遠ざかる速さの符号を間違える。衝突後、正の向きに見て Q は P より前にあるので、それは $v_n - u_n$ である。
- 衝突の式から u_1 を求めないまま $u_1 = \frac{7}{10}A + \frac{5}{7}B$ を使う。$(*)$ だけではそれは得られない。

STEP のその先へ

式 (1) と (2) の組は、状態 (u_{n-1}, v_{n-1}) を (u_n, v_n) に移す線形写像（linear map）であり、したがって運動全体は 2×2 行列（matrix）を繰り返し掛けることにほかならない。解 $\frac{7}{10}$ と $\frac{5}{7}$ はこの行列の固有値（eigenvalue）であり、長期的な振る舞いは最大の固有値によって支配される。これが線形力学系（linear dynamical system）と差分方程式（difference equation）の理論の出発点である。衝突の力学についてさらに知りたければ Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を、行列の観点についてはストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。