解答例

STEP III 2018、第 8 問

純粋数学 • 小数部分の積分

> **STEP III 2018、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q8

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）の中で扱いにくいのは x^{-1} であるから、$y = 1/x$ と置換（substitution）する。これにより $[0,1]$ は $[1,\infty)$ に移り、この区間は自然に長さ 1 の区間に分割できる。f が周期（period）1 をもてば、各単位区間は $[0,1]$ へ平行移動して戻すことができ、残った有理式の因子は望遠鏡和（telescoping sum）をなす。小問 (ii) は、$\{x\}$ と $\{2x\}$ がどちらも周期 1 をもつことに気づけばよい。

解答

小問 (i)

$x = 1/y$ とおくと $\mathrm{d}x = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$ であり、x が 0 から 1 まで動くとき、y は ∞ から 1 まで減少する。また $1 + x = \frac{y+1}{y}$ であるから、

$$I = \int_{\infty}^{1} \frac{f(y)}{(y+1)/y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_{1}^{\infty} \frac{f(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y.$$

$[1,\infty)$ を $n = 1,2,3,\ldots$ に対する区間 $[n,n+1]$ に分割すると

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{f(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y,$$

となり、示すべき式が得られる。

次に、すべての x に対して $f(x) = f(x+1)$ が成り立つと仮定する。このとき任意の整数 n に対して $f(x+n) = f(x)$ である。n 番目の積分で $y = x + n$ とおくと、x は $[0,1]$

を動く：

$$\int_n^{n+1} \frac{f(y)}{y(1+y)}\,dy = \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+n)(x+n+1)}\,dx.$$

考えてみよう このような積分を無限個足し合わせるにはどうすればよいか？

どの積分も同じ $f(x)$ と同じ積分区間をもつので、（問題文の指示どおり収束（convergence）の問題は無視して）和と積分の順序を交換し、先に有理式の因子を足し合わせることができる。部分分数分解（partial fractions）により

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1},$$

であるから、和は望遠鏡和となる。すなわち、固定した $x \in [0,1]$ に対して

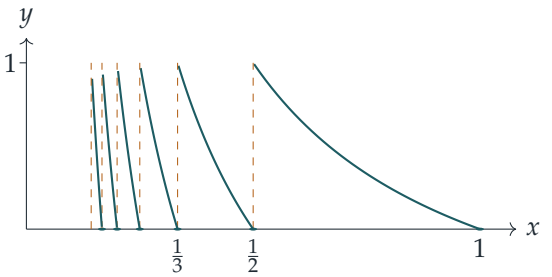
$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+N+1} \longrightarrow \frac{1}{1+x} \quad \text{極限} N \to \infty.$$

したがって

$$I = \int_0^1 f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,dx,$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (ii)



上の $\{x^{-1}\}$ のグラフを見れば、直接計算しようとしても見込みがない理由がわかる。各区間 $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ 上でこの関数は $\frac{1}{x} - n$ に等しく、そのような区間が 0 に向かって無限個ひしめいている。小問 (i) を使えば、これらをすべて回避できる。

第一の積分。 $f(x) = \{x\}$ とする。x に 1 を加えると $\lfloor x \rfloor$ に 1 が加わるので $\{x+1\} = \{x\}$ であり、f は周期 1 をもつ。$[0,1)$ 上では $\{x\} = x$ である（1 点 $x = 1$ での値は積分に影響しない）。よって小問 (i) により

$$\int_0^1 \frac{\{x^{-1}\}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = 1 - \ln 2.$$

第二の積分。 $f(x) = \{2x\}$ とすると、必要なとおり $f(x^{-1}) = \{2x^{-1}\}$ となる。

考えてみよう 関数 $\{2x\}$ の周期は $\frac{1}{2}$ である。それでも小問 (i) を使えるだろうか？

使える。$\{2(x+1)\} = \{2x+2\} = \{2x\}$ であるから、周期 $\frac{1}{2}$ をもつものは周期 1 ももつ。したがって小問 (i) が適用できる。$[0, \frac{1}{2})$ 上では $2x \in [0,1)$ であり $\{2x\} = 2x$、$[\frac{1}{2}, 1)$ 上では $2x \in [1,2)$ であり $\{2x\} = 2x-1$ である。ゆえに

$$\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

$\frac{2x}{1+x} = 2 - \frac{2}{1+x}$、$\frac{2x-1}{1+x} = 2 - \frac{3}{1+x}$ と書き直すと、

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\ln\tfrac{3}{2},$$
$$\int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 3\ln\frac{2}{3/2} = 1 - 3\ln\tfrac{4}{3}.$$

これらを足し、対数をまとめると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 - 6\ln 2 + 3\ln 3 \\ &= 2 + \ln 3 - 4\ln 2 = 2 + \ln\tfrac{3}{16}.\end{aligned}$$

検算

- $0 \le \{\cdot\} < 1$ であるから、どちらの答えも 0 と $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2 \approx 0.693$ の間にあるはずである。得られた値は $1 - \ln 2 \approx 0.3069$ と $2 + \ln\frac{3}{16} \approx 0.3260$ であり、妥当である。小数部分（fractional part）の平均はおよそ $\frac{1}{2}$ なので、答えは 0.693 のおよそ半分になるはずである。
- 区間 $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$（第二の積分ではそれぞれの半分）上の積分を、コンピュータで何千個もの区間について足し合わせると 0.306853 と 0.326024 が得られ、どちらの答えとも一致する。

よくある間違い

- $y = 1/x$ と置換した後、積分の上端と下端を逆にしたまま、マイナス符号を落としてしまう。$\mathrm{d}x$ から出るマイナスと上下端の入れ替えは打ち消し合う。
- $[0,1]$ 全体で $\{2x\} = 2x$ であると思い込む。実際には $x = \frac{1}{2}$ で値が 1 だけ下がる。
- 小問 (i) には周期がちょうど 1 であることが必要だと考える。周期 $\frac{1}{k}$（k は正の整数）をもつ関数はすべて周期 1 ももつ。

STEP のその先へ

ここでは断りなく無限和と積分の順序を交換したが、これはまさに大学で正当化が求められる種類の操作である。単調収束定理（monotone convergence theorem）や優収束定理（dominated convergence theorem）といった定理が、それが安全に行える条件を教えてくれる（ここでは $\mathrm{f} \geq 0$ のとき各項が非負であり、これは易しい場合にあたる）。同じ置換の考え方から、$\int_0^1 \{1/x\}\,\mathrm{d}x = 1 - \gamma$ のような小数部分に関する有名な積分が得られる。ここで γ はオイラー（Euler）定数である。極限、級数、積分の厳密な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。