解答例

STEP III 2018、第 7 問

純粋数学 ・ ド・モアブルの定理と級数

> **STEP III 2018、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.4 節「$\pi^2/6$」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/basel.html

鍵となる考え方

式 $\cot\theta + \mathrm{i}$ は、姿を変えた $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)/\sin\theta$ にほかならない。したがってド・モアブルの定理（De Moivre's theorem）により、そのべき乗は倍角の式に変わる。同じべき乗を二項定理（binomial theorem）で展開すると $\cot^2\theta$ の多項式（polynomial）が得られ、その根は $\sin(2n+1)\theta$ が 0 になる点から読み取れる。あとは解と係数の関係（Vieta's formula）によって根の和がただちに求まり、$1/\theta^2$ を $\cot^2\theta$ と $1+\cot^2\theta$ ではさむことで、バーゼル問題の和（Basel sum）を、同じ極限に収束する二つの評価の間に閉じ込めることができる。

解答

小問 (i)

$\sin\theta \neq 0$ であるから、

$$\cot\theta \pm \mathrm{i} = \frac{\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}.$$

ド・モアブルの定理より $(\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1} = \cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta$ であるから、

$$\frac{(\cot\theta+\mathrm{i})^{2n+1} - (\cot\theta-\mathrm{i})^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{2\mathrm{i}\,\sin^{2n+1}\theta} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta},$$

となり、これが求める恒等式である。

次に、左辺を今度は二項定理で展開する。$c = \cot\theta$、$N = 2n+1$ とおくと、

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} c^{N-k}\,\mathrm{i}^k\bigl(1-(-1)^k\bigr).$$

括弧の中は、k が偶数のとき 0、k が奇数のとき 2 である。$j = 0, 1, \ldots, n$ として $k = 2j+1$ とおくと、$\mathrm{i}^k = \mathrm{i}(-1)^j$、$c^{N-k} = c^{2(n-j)}$ となる。2i で割り、$x = \cot^2\theta$ とおくと、

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}x^{n-j} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n.$$

この多項式を $P(x)$ とよぶ。これは n 次式であり、最高次の係数は $2n+1 \neq 0$ である。$m = 1, \ldots, n$ に対して $\theta_m = \dfrac{m\pi}{2n+1}$ とする。このとき $0 < \theta_m < \frac{1}{2}\pi$ であるから $\sin\theta_m \neq 0$ であり、また $\sin(2n+1)\theta_m = \sin m\pi = 0$ である。よって

$$P\bigl(\cot^2\theta_m\bigr) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

考えてみよう これらが解の一部にすぎないのではなく、すべての解であることは、どうすればわかるだろうか。

$(0, \frac{1}{2}\pi)$ において $\cot\theta$ は正で狭義単調減少であるから、$\cot^2\theta$ も狭義単調減少である。角 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$ はすべてこの区間にあるので、n 個の数 $\cot^2\theta_m$ は互いに異なる。n 次の多項式の根は高々 n 個であるから、これらがちょうど $P(x) = 0$ の解のすべてである。

小問 (ii)

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$ の根の和は $-a_{n-1}/a_n$ である。ここでは $a_n = \binom{2n+1}{1}$、$a_{n-1} = -\binom{2n+1}{3}$ であるから、

$$\sum_{m=1}^{n}\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3},$$

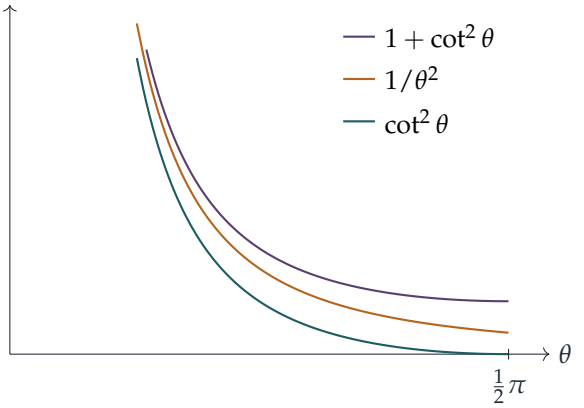
となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ に対して $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$ が与えられている。三つとも正であるから、2 乗しても大小関係は保たれ、逆数をとると大小関係は逆転する。よって

$$\frac{1}{\tan^2\theta} < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad \text{すなわち} \qquad \cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2\theta,$$

である。ここで $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ を用いた。



$\theta = \theta_m = \dfrac{m\pi}{2n+1}$ とおくと $\dfrac{1}{\theta_m^2} = \dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2} \cdot \dfrac{1}{m^2}$ となる。この不等式を $m = 1, \ldots, n$ について足し合わせる。$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}$ とおき、小問 (ii) を用いると、

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} S_n < n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

全体に $\pi^2/(2n+1)^2 > 0$ を掛けると、

$$\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < S_n < \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

分子と分母を n^2 で割れば、$n \to \infty$ のときどちらの分数も $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ に収束（converge）するので、両側の評価はともに $\frac{\pi^2}{6}$ に収束する。はさみうちの原理（squeeze theorem、sandwich theorem）により $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$ であり、これは

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

を意味する。

検算

- $n = 1$ のとき多項式は $3x - 1$ であり、その根は $\frac{1}{3} = \cot^2 \frac{\pi}{3}$ である。(ii) の公式も $1 \times 1/3 = \frac{1}{3}$ を与える。$n = 2$ のとき、$\cot^2 \frac{\pi}{5} + \cot^2 \frac{2\pi}{5}$ は 2 になるはずであり、数値的にも $1.894 + 0.106 = 2.000$ である。
- $n = 50$ のとき、(iii) の評価は $1.5964 < S_{50} = 1.6251 < 1.6448$ であり、$\pi^2/6 \approx 1.6449$ である。両側の評価は互いに近づいていくが、それは当然であり、両者の差は $\pi^2 n/(2n+1)^2 \approx \pi^2/(4n)$ だからである。

よくある間違い

- 各 $\cot^2\theta_m$ が根であることは示したのに、それらが互いに異なることを論じ忘れる。これこそが、それらが**すべての**解であることを保証する点である。
- 解と係数の関係で符号を間違える。x^{n-1} の係数は $-\binom{2n+1}{3}$ であるから、根の和は $+\binom{2n+1}{3}/\binom{2n+1}{1}$ である。
- すべての量が正であることに触れずに不等式の向きを逆転させる。2 乗したり逆数をとったりできるのは、すべての量が正だからである。

STEP のその先へ

オイラー（Euler）は 1734 年、$\sin x/x$ を「無限次の多項式」とみなして係数を比較することにより、初めて $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$ を見いだした。これはここで用いた解と係数の関係と同じ発想であるが、はさみうちの原理がもたらすような厳密さは欠いていた。大学では、この和にフーリエ級数（Fourier series）を通じて（パーセバルの等式（Parseval's identity））、またリーマンゼータ関数（Riemann zeta function）の最初の値 $\zeta(2)$ として再び出会うことになる。値 $\zeta(2k)$ はすべて π^{2k} の有理数倍であるのに対し、$\zeta(3)$ についてはほとんど何もわかっていない。極限とはさみうちの原理の背後にある解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。