解答例

STEP III 2018、第 6 問

純粋数学 • 複素数と図形

> **STEP III 2018、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q6

鍵となる考え方

複素数が実数であるのは、それが自分自身の複素共役（conjugate）と等しいときであり、かつそのときに限る。したがって、3 点が同一直線上にある（collinear）という条件は、z と z^* の間の方程式に書き換えられる。単位円（unit circle）上では $a^* = 1/a$ が成り立つので、円周上の点の共役を消去でき、弦（chord）上の任意の点 q に対する**線形**（linear）方程式が残る。以降の結果はいずれも、このような弦の方程式を 2 本書き下し、それらを足したり引いたりすることで得られる。

解答

小問 (i)

A, Q, C は同一直線上にあり $A \neq C$ であるから、点 Q は A に、A から C へのベクトルの実数倍を加えたものである。すなわち、ある実数 t について $q - a = t(c - a)$ が成り立つ。$c \neq a$ であるから割り算ができて、

$$\frac{q-a}{c-a} = t \quad \text{は実数である。}$$

実数はその共役に等しいので、

$$\frac{q-a}{c-a} = \frac{q^*-a^*}{c^*-a^*},$$

となる。ここで $c \neq a$ より $c^* - a^* \neq 0$ である。分母を払うと $(c-a)(q^*-a^*) = (c^*-a^*)(q-a)$ となり、示すべき式が得られた。

次に $aa^* = cc^* = 1$ と仮定する。すると $a^* = 1/a, c^* = 1/c$ である。このとき

$$c^* - a^* = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{a-c}{ac} = -\frac{c-a}{ac},$$

であり、先の方程式は

$$(c-a)\left(q^*-\frac{1}{a}\right)=-\frac{c-a}{ac}\,(q-a).$$

となる。$c-a\neq 0$ で割り、$-ac$ を掛けると、

$$-ac\,q^*+c=q-a,\qquad \text{すなわち、}\qquad q+ac\,q^*=a+c.$$

これが弦 AC の方程式である。A と C を通る直線上のすべての点 q がこれを満たす。

小問 (ii)

A, B, C, D は反時計回りの順に並んでいるので、AC と BD は円に内接する（inscribed）凸四角形（convex quadrilateral）の対角線（diagonal）であり、円の真に内部にある点 Q で交わる。特に Q は 4 点のいずれとも異なるので、直線 AC と BD に小問 (i) を適用できる：

$$q+ac\,q^*=a+c,$$
$$q+bd\,q^*=b+d.$$

第 1 式から第 2 式を引くと q が消える：

$$(ac-bd)\,q^*=(a+c)-(b+d). \tag{1}$$

考えてみよう q^* についての式は得られた。これに足し合わせるための q についての式は、どうすれば得られるだろうか？

(1) の共役をとり、再び $a^*=1/a$ などを用いる。左辺は

$$\left(\frac{1}{ac}-\frac{1}{bd}\right)q=\frac{bd-ac}{abcd}\,q,$$

となり、右辺は

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{d}=\frac{a+c}{ac}-\frac{b+d}{bd}=\frac{bd(a+c)-ac(b+d)}{abcd}.$$

となる。$-abcd$ を掛けると、

$$(ac-bd)\,q=ac(b+d)-bd(a+c). \tag{2}$$

(1) と (2) を足すと、

$$(ac-bd)(q+q^*)=a+c-b-d+abc+acd-abd-bcd.$$

右辺の項をまとめると、

$$(a-b)+(acd-bcd)+(c-d)+(abc-abd)=(a-b)(1+cd)+(c-d)(1+ab),$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (iii)

直線 AB と CD は内接四角形の向かい合う辺であるから、それらの交点 P は円の外部にある。よって P は A, B とも、C, D とも異なる。同一直線上の 3 点 A, P, B に小問 (i) を適用すると $p + ab\,p^* = a + b$ を得る。p は実数なので $p^* = p$ であり、したがって

$$p(1 + ab) = a + b.$$

同様に、C, P, D から

$$p(1 + cd) = c + d.$$

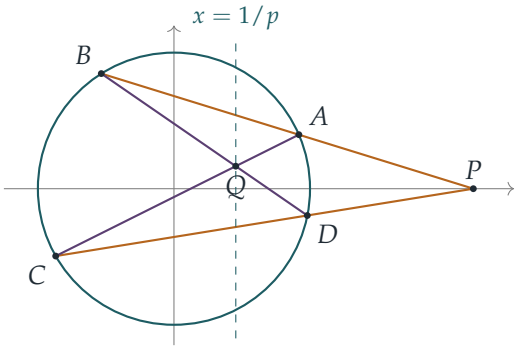
を得る。ここで小問 (ii) の最終結果に p を掛け、これら 2 つの式を代入すると：

$$\begin{aligned} p\,(ac - bd)(q + q^*) &= (a - b)\,p(1 + cd) + (c - d)\,p(1 + ab) \\ &= (a - b)(c + d) + (c - d)(a + b) \\ &= (ac + ad - bc - bd) + (ac + bc - ad - bd) \\ &= 2(ac - bd). \end{aligned}$$

$ac - bd \neq 0$ であるからこれで割ることができ、$p(q + q^*) = 2$ が得られて、示された。

実際、ここでは $ac - bd$ が 0 になることは決してない。もし $ac = bd$ ならば、(1) より $a + c = b + d$ も成り立つので、$z^2 - (a + c)z + ac$ と $z^2 - (b + d)z + bd$ は同じ 2 次式になる。すると $\{a, c\} = \{b, d\}$ となり、4 点が相異なることに矛盾する。

$q + q^* = 2\,\mathrm{Re}\,q$ であるから、この結果は $\mathrm{Re}\,q = 1/p$ を意味する。P を通る 2 本の直線をどのように選んでも、対角線の交点 Q は固定された垂直な直線 $x = 1/p$ 上にある。



検算

- 対称な場合：A, B を偏角 $20°, 70°$ の点、C, D を偏角 $-70°, -20°$ の点とする。実軸に関する対称性により P と Q はともに実数であり、結果は $pq = 1$ を意味する。

$a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ とすると、公式 $p = (a+b)/(1+ab)$ から $p = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} / \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos 25^\circ / \cos 45^\circ \approx 1.2817$ を得る。AC が実軸と交わる点として q を直接求めると $q \approx 0.7802$ であり、$pq \approx 1.0000$ となる。

- 図では $p = 2.2$ を用いている。対角線は予測どおり $x \approx 0.4545 = 1/2.2$ で交わる。また、3 つの等式はいずれも、数千通りのランダムな配置についてコンピュータで確認した。

よくある間違い

- $ac - bd$ の共役をとると、再び $ac - bd$ になるのではなく $1/(ac) - 1/(bd)$ になることを忘れる。因数 $abcd$ は注意深く払わなければならない。
- $c - a$ や $ac - bd$ が 0 でない理由を述べずに、それらで割る。

STEP のその先へ

ここで Q は、円に関する P の**極線**（polar）上にある。単位円の外部にあり中心からの距離が p である点 P に対し、その極線は OP に垂直で O からの距離が $1/p$ の直線である。これは射影幾何学（projective geometry）におけるブロカールの定理（Brocard's theorem）の一部であり、その背後にある写像 $P \mapsto 1/p^*$ は円に関する**反転**（inversion）である。反転は複素解析（complex analysis）と幾何学における重要な道具である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、反転とアルガン図（Argand diagram、複素平面）の幾何学を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。