解答例

STEP III 2018、第 5 問

純粋数学 ・ 相加相乗平均の不等式

> **STEP III 2018、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q5

鍵となる考え方

これは数学的帰納法（induction）による相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）の証明であるが、ひとひねりがある。$A_n \geq G_n$ を直接示すのではなく、重みをつけた差 $n(A_n - G_n)$ が、新しい数を一つ加えたときに決して減少しないことを示すのである。この差は $n = 1$ のときゼロから始まるので、つねに非負のままである。量 λ_k は G_{k+1} が G_k の単純な定数倍になるように選ばれており、これによって比較全体が一変数の多項式不等式に帰着される。

解答

小問 (i)

第 k 段階と第 $k+1$ 段階を結びつける事実が二つある。和については

$$(k+1)A_{k+1} = a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} = kA_k + a_{k+1}.$$

積については $G_k^k = a_1 a_2 \cdots a_k$ であり、λ_k の定義から $a_{k+1} = G_k \lambda_k^{k+1}$ が得られる。したがって

$$G_{k+1}^{k+1} = G_k^k \, a_{k+1} = G_k^k \cdot G_k \lambda_k^{k+1} = (G_k \lambda_k)^{k+1}, \qquad \text{よって} \qquad G_{k+1} = G_k \lambda_k,$$

となる。ここで $G_k > 0$ かつ $\lambda_k > 0$ であるから、正の $(k+1)$ 乗根をとった。λ_k があのように定義されたのは、まさにこのためである。

次に両辺を比較する。

$$\begin{aligned}(k+1)(A_{k+1}-G_{k+1})-k(A_k-G_k) &= kA_k+a_{k+1}-(k+1)G_{k+1}-kA_k+kG_k\\ &= G_k\lambda_k^{k+1}-(k+1)G_k\lambda_k+kG_k\\ &= G_k(\lambda_k^{k+1}-(k+1)\lambda_k+k).\end{aligned}$$

$G_k>0$ であるから、左辺が ≥ 0 であることと、括弧内が ≥ 0 であることは同値である。これが求める同値性（equivalence）である。

小問 (ii)

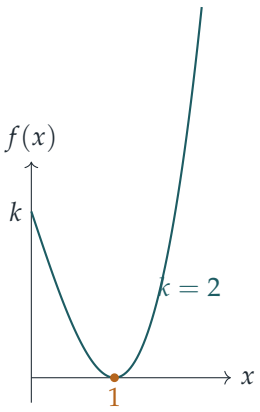
微分すると

$$f'(x)=(k+1)x^k-(k+1)=(k+1)(x^k-1).$$

$0<x<1$ のとき $x^k<1$ であるから $f'(x)<0$ であり、$x>1$ のとき $x^k>1$ であるから $f'(x)>0$ である。よって f は $(0,1]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）、$[1,\infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であり、$x>0$ における最小値は

$$f(1)=1-(k+1)+k=0.$$

である。したがって、すべての $x>0$ に対して $f(x)\geq 0$ が成り立つ。さらに、$x\neq 1$ ならば、1 の両側での狭義単調性により $f(x)>f(1)=0$ となる。よって $f(x)=0$ となるのは $x=1$ のときに限られ、逆は $f(1)=0$ から従う。



（$k=2$ のとき $f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ である。$x=1$ における重根（double root）は、グラフがちょうど軸に接する点に対応する。）

小問 (iii)

各正の整数 n に対して $d_n=n(A_n-G_n)$ とおく。

(a) 小問 (ii) を $x = \lambda_k > 0$ に適用すると $\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k \geq 0$ が得られるので、小問 (i) より

$$d_{k+1} \geq d_k \qquad \text{すべての} k \geq 1.$$

が成り立つ。また $A_1 = a_1 = G_1$ であるから $d_1 = 0$ である。よって

$$0 = d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_n,$$

となり、$d_n \geq 0$ である。$n > 0$ で割れば、すべての n に対して $A_n \geq G_n$ が得られる。

(b)

考えてみよう $A_n = G_n$ ならば、不等式の連鎖の最後の段階だけでなく、それより前の段階について何がわかるだろうか。

$A_n = G_n$ ならば $d_n = 0$ であり、連鎖は $0 = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n = 0$ となる。0 で始まり 0 で終わる非減少の連鎖は一定でなければならないので、各 $k = 1, \ldots, n-1$ に対して $d_{k+1} = d_k$ である。小問 (i) の恒等式（identity）より、これは $G_k f(\lambda_k) = 0$ を意味し、$G_k > 0$ であるから $f(\lambda_k) = 0$ である。小問 (ii) より $\lambda_k = 1$ であり、これは各 $k = 1, \ldots, n-1$ に対して $a_{k+1} = G_k$ であることを表す。

ここで k に関する帰納法を用いる。$k = 1$ のとき $a_2 = G_1 = a_1$ である。$a_1 = \cdots = a_k = a$ ならば $G_k = (a^k)^{1/k} = a$ であるから、$a_{k+1} = G_k = a$ となる。よって $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ であり、示すべきことが示された。

検算

$a_1, a_2, a_3 = 1, 4, 16$ とする。すると $A_2 = 2.5$、$G_2 = 2$、$A_3 = 7$、$G_3 = 4$ であるから、$d_1, d_2, d_3 = 0, 1, 9$ となり、約束どおり増加している。ここで $\lambda_2 = (16/2)^{1/3} = 2$ であり、$G_2 f(\lambda_2) = 2(8 - 6 + 2) = 8 = d_3 - d_2$ となるので、小問 (i) の恒等式が確かめられる。数千通りのランダムな正の数列についてこの恒等式と $d_{k+1} \geq d_k$ をコンピュータで確認したところ、例外は見つからなかった。

よくある間違い

- 小問 (i) で一方向しか証明しないこと。差を $G_k f(\lambda_k)$ と書けば、$G_k > 0$ であるから両方向が一度に得られる。
- (iii)(b) で $\lambda_{n-1} = 1$ だけを結論してしまうこと。連鎖のすべての段階が等号でなければならず、それは連鎖が $d_1 = 0$ から始まることから従う。

- 小問 (ii) を適用する前に、なぜ $\lambda_k > 0$ なのかを述べ忘れること。小問 (ii) は $x > 0$ の場合しか扱っていない。

STEP のその先へ

不等式 $x^{k+1} - (k+1)x + k \geq 0$ はベルヌーイ（Bernoulli）の不等式の特別な場合であり、相加・相乗平均の不等式そのものは、凹関数（concave function）$\ln x$ に対するイェンセン（Jensen）の不等式の特別な場合である。こうした凸性（convexity）に関する不等式は、大学 1 年の解析学（analysis）における基本的な道具である。コーシー（Cauchy）の「前進・後退」帰納法をはじめ、相加・相乗平均の不等式の他のいくつかの証明を調べてみるのはよい演習になる。解析学の背景については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）が扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。