解答例

STEP III 2018、第 4 問

純粋数学 • 双曲線の接線

> **STEP III 2018、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q4

鍵となる考え方

接線（tangent）は、$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線が $xx_1/a^2 - yy_1/b^2 = 1$ であるという標準的な結果を使うのが最も速い。あとはすべて 2 直線の交点の問題なので、連立一次方程式を解き、三角関数の式を整理するだけである。小問 (ii) では、直交条件が b を含む $\sin\theta$ と $\sin\phi$ の間のただ一つの関係式となり、まさにこれによって式から b を消去し、そのあと $a^2 - b^2$ の形で b を戻すことができる。和積公式（sum-to-product formulae）を使えば最後の計算は短くなる。

解答

P における接線

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2y}{b^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ となるので、(x_1, y_1) における傾き（gradient）は $\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ であり、接線は

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \iff \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

となる。ここで (x_1, y_1) が曲線上にあることを用いた。（この形は、$y_1 = 0$ で接線が垂直になる頂点（vertex）の場合も含んでいる。）$x_1 = a\sec\theta, y_1 = b\tan\theta$ とすると

$$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1.$$

両辺に $ab\cos\theta$ を掛けると（$\sec\theta$ が存在するので、これは 0 でない）

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta,$$

となり、示すべき式が得られる。

小問 (i)

与えられた 2 直線は漸近線（asymptote）$y = \pm\frac{b}{a}x$ である。

S において、$ay = bx$ である。$ay = bx$ を接線の式に代入すると $bx(1-\sin\theta) = ab\cos\theta$ となるので

$$S = \left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}, \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right).$$

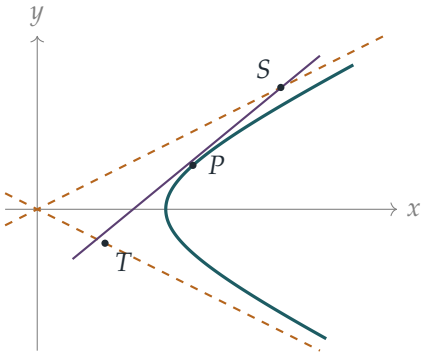
T において、$ay = -bx$ であり、これより $bx(1+\sin\theta) = ab\cos\theta$ となるので

$$T = \left(\frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta}, -\frac{b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right).$$

$\cos\theta \neq 0$ より $\sin\theta \neq \pm 1$ なので、どちらの分母も 0 でない。足し合わせ、$(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) = \cos^2\theta$ を用いると：

$$x_S + x_T = a\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2a}{\cos\theta} = 2a\sec\theta,$$
$$y_S + y_T = b\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)-(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2b\sin\theta}{\cos\theta} = 2b\tan\theta.$$

よって ST の中点（mid-point）は $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ であり、**ST の中点は P そのものである**。任意の点における接線は、2 本の漸近線によって接点で二等分されるのである。



小問 (ii)

直交条件。 $ay\sin\theta = bx - ab\cos\theta$ と書けば、$\sin\theta \neq 0$ のとき P における接線の傾きは $\dfrac{b}{a\sin\theta}$ である。（$\sin\theta = 0$ ならば接線は垂直なので、Q における接線は水平でなければならない。しかし $b/(a\sin\phi) \neq 0$ なので、水平な接線は存在しない。したがって $\sin\theta \neq 0$ であり、同様に $\sin\phi \neq 0$ である。）接線が直交するためには、傾きの積が -1 であればよい：

$$\frac{b^2}{a^2\sin\theta\sin\phi} = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin\theta\sin\phi = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{$*$}$$

特に $\sin\theta$ と $\sin\phi$ は異符号なので、$\sin\phi - \sin\theta \neq 0$ である。$(*)$ には $b^2/a^2 < 1$ が必要であり、ここで $a > b$ が使われることに注意する。

交点。 点 (x, y) は

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta, \qquad bx - ay\sin\phi = ab\cos\phi.$$

を満たす。第 1 式から第 2 式を引くと $ay(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\cos\theta - \cos\phi)$ となる。第 1 式に $\sin\phi$ を、第 2 式に $\sin\theta$ を掛けて引くと $bx(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta) = ab\sin(\phi - \theta)$ となる。よって

$$x = \frac{a\sin(\phi-\theta)}{\sin\phi - \sin\theta}, \qquad y = \frac{b(\cos\theta - \cos\phi)}{\sin\phi - \sin\theta}.$$

考えてみよう これらにはまだ b が含まれている。x^2 と y^2 を a, θ, ϕ だけで表すにはどうすればよいか。また、分数は簡単にできるだろうか。

条件 $(*)$ は $b^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi$ を意味するので、2 乗すれば b を消去できる。簡単にするために、$\alpha = \frac{1}{2}(\phi + \theta), \beta = \frac{1}{2}(\phi - \theta)$ とおく。和積公式により

$$\sin\phi - \sin\theta = 2\cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos\theta - \cos\phi = 2\sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\phi-\theta) = 2\sin\beta\cos\beta,$$

であり、$\sin\phi - \sin\theta \neq 0$ なので $\cos\alpha\sin\beta \neq 0$ である。$2\sin\beta$ を約分して

$$x = \frac{a\cos\beta}{\cos\alpha}, \qquad y = b\tan\alpha,$$

したがって

$$x^2 = \frac{a^2\cos^2(\frac{1}{2}(\phi-\theta))}{\cos^2(\frac{1}{2}(\phi+\theta))},$$
$$y^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi\,\tan^2(\tfrac{1}{2}(\phi+\theta)).$$

半角を用いずに書けば、同値な式として

$$x^2 = \frac{a^2\sin^2(\phi-\theta)}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}, \qquad y^2 = -\frac{a^2\sin\theta\sin\phi\,(\cos\theta-\cos\phi)^2}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}.$$

円。 $\sin\theta\sin\phi$ も α と β で表す必要がある。$\theta = \alpha - \beta, \phi = \alpha + \beta$ なので

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\phi &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &= (1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha.\end{aligned}$$

$k = \sin\theta\sin\phi = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$ とおく。すると $\tan^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)/\cos^2\alpha$ より

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[\cos^2\beta - k\,(1-\cos^2\alpha)\right] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[(\cos^2\beta - k) + k\cos^2\alpha\right] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[\cos^2\alpha + k\cos^2\alpha\right] \qquad \text{なぜなら } \cos^2\beta - k = \cos^2\alpha \\ &= a^2(1+k) = a^2 + a^2\sin\theta\sin\phi = a^2 - b^2, \end{aligned}$$

最後の段階で $(*)$ を用いた。よって、直交する任意の 2 接線の交点は円 $x^2+y^2 = a^2-b^2$ 上にあり、示すべきことが示された。

検算

- $a=2, b=1, \theta = \frac{\pi}{6}, \phi = -\frac{\pi}{6}$ とする。このとき $\sin\theta\sin\phi = -\frac{1}{4} = -b^2/a^2$ なので、2 接線は直交する（傾きは 1 と -1）。ここで $\alpha = 0, \beta = -\frac{\pi}{6}$ なので、$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $y = 0$ であり、$x^2+y^2 = 3 = a^2-b^2$ となる。直接確かめても、接線 $x-y=\sqrt{3}$ と $x+y=\sqrt{3}$ は確かに $(\sqrt{3}, 0)$ で交わる。
- 小問 (i) において $\theta \to 0$ とすると、接線は垂直な直線 $x = a$ となり、漸近線と $(a, \pm b)$ で交わる。その中点は $(a, 0) = P$ である。
- 小問 (i) の中点や $x^2+y^2 = a^2-b^2$ を含む上の式はすべて、$a > b > 0$ と直交する組 θ, ϕ を無作為に何千通りも選び、2 本の接線の方程式を直接解くことで、コンピュータによって確認した。

よくある間違い

- x^2 と y^2 の式に b を残してしまうこと。問題は a, θ, ϕ だけで表すことを求めているので、$(*)$ を用いて b^2 を消去しなければならない。
- 式変形を誤って接線の傾きを $-b/(a\sin\theta)$ としてしまうこと。第 1 象限の点で傾きが正になることを確かめるとよい。
- $\sin\phi - \sin\theta$ が 0 でない理由を述べずに、これで割ってしまうこと。

STEP のその先へ

小問 (ii) の円は双曲線（hyperbola）の**準円**（director circle）、すなわち、そこから引いた 2 本の接線が直交するような点の軌跡（locus）である。楕円（ellipse）の準円は

$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ であり、$a < b$ の双曲線には実の準円がそもそも存在しない。問題が $a > b$ を課しているのはこのためである。小問 (i) の二等分の性質は、円錐曲線（conic）の射影幾何学（projective geometry）とアフィン幾何学（affine geometry）への最初の入り口であり、そこでは接線、漸近線、極と極線（poles and polars）が統一的に扱われる。まさにこうした趣の問題に取り組みたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（上級数学問題集）に挑戦するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。