解答例

STEP III 2018、第 3 問

純粋数学 ・ オイラー型微分方程式

> **STEP III 2018、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q3

鍵となる考え方

左辺はオイラー（Euler）の方程式（等次元方程式（equidimensional equation））である。すなわち、各導関数には対応する x のべきが掛かっている。入れ子になった形 $(*)$ を展開して係数を比較すれば、a、b、c が決まる。方程式をこの形に書き直してしまえば、導関数を一つずつはがしていく 2 回の素直な積分で解くことができる。場合分けが生じるのは、ちょうどその積分の一方が x^{-1} の積分となり、対数が現れるときである。

解答

以下では常に $x > 0$ で考える。こうすれば x のべきはすべて定義される。

a、b、c を求める

積の微分法則（product rule）により、

$$(x^c y)' = x^c y' + c x^{c-1} y, \qquad \text{よって} \qquad x^b (x^c y)' = x^{b+c} y' + c x^{b+c-1} y.$$

もう一度微分すると、

$$(x^b (x^c y)')' = x^{b+c} y'' + (b+c) x^{b+c-1} y' + c x^{b+c-1} y' + c(b+c-1) x^{b+c-2} y.$$

x^a を掛け、$a + b + c = 2$ と選ぶと、

$$x^a (x^b (x^c y)')' = x^2 y'' + (b + 2c)\, x y' + c(b + c - 1)\, y.$$

これが与えられた左辺と一致するための条件は

$$b + 2c = 1 - 2p, \qquad c(b + c - 1) = p^2 - q^2.$$

である。第1式から $b+c-1=-2p-c$ となるので、第2式は $-c^2-2pc=p^2-q^2$、すなわち $(c+p)^2=q^2$ となる。$c+p=q$ をとると、

$$c=q-p,\qquad b=1-2p-2c=1-2q,\qquad a=2-b-c=1+p+q.$$

したがって、方程式は

$$x^{1+p+q}\left(x^{1-2q}(x^{q-p}y)'\right)'=\mathrm{f}(x),$$

と書ける。これが示すべきことであった。（もう一方の根 $c+p=-q$ をとると、q を $-q$ に置き換えた同じものが得られる。方程式には q^2 しか現れないので、これは何も変わらない。）

小問 (i)

$\mathrm{f}=0$ のとき、$x^{1+p+q}\neq 0$ で割ることができる：

$$\left(x^{1-2q}(x^{q-p}y)'\right)'=0\quad\Longrightarrow\quad x^{1-2q}(x^{q-p}y)'=A\quad\Longrightarrow\quad (x^{q-p}y)'=Ax^{2q-1},$$

ここで A は定数である。次の積分は、べき $2q-1$ が -1 であるかどうかによって変わる。

? **考えてみよう** なぜここでは p の値によって場合分けが生じないのだろうか？

積分する指数は $2q-1$ であり、これは p を含まない。p は因子 x^{q-p} を通じてのみ現れ、最後にこれで割るだけである。よって、場合分けは q のみによって決まる。

$q\neq 0$ の場合。 積分すると $x^{q-p}y=\dfrac{A}{2q}x^{2q}+B$ となり、x^{p-q} を掛けて（定数 $\frac{A}{2q}$ を改めて A とおくと）、

$$y=Ax^{p+q}+Bx^{p-q}.$$

$q=0$ の場合。 このとき $(x^{-p}y)'=Ax^{-1}$ であるから、$x^{-p}y=A\ln x+B$ となり、

$$y=x^p\,(A\ln x+B).$$

いずれの場合も任意定数は2個であり、2階の方程式から予想されるとおりである。

小問 (ii)

これは $q=0$、$\mathrm{f}(x)=x^n$ の場合であるから、$a=1+p$、$b=1$、$c=-p$ であり、方程式は

$$x^{1+p}\left(x(x^{-p}y)'\right)'=x^n\quad\Longleftrightarrow\quad\left(x(x^{-p}y)'\right)'=x^{n-p-1}.$$

となる。1回目の積分には x^{n-p-1} が現れ、これがちょうど x^{-1} となるのは $n=p$ のときである。

$n \neq p$ の場合。 1 回積分すると、

$$x(x^{-p}y)' = \frac{x^{n-p}}{n-p} + A \quad \Longrightarrow \quad (x^{-p}y)' = \frac{x^{n-p-1}}{n-p} + \frac{A}{x}.$$

再び $n-p \neq 0$ であるから、積分して

$$x^{-p}y = \frac{x^{n-p}}{(n-p)^2} + A\ln x + B, \qquad \text{よって} \qquad y = \frac{x^n}{(n-p)^2} + x^p\,(A\ln x + B).$$

$n = p$ の場合。 このときは 1 回目の積分で対数が現れる：

$$x(x^{-p}y)' = \ln x + A \quad \Longrightarrow \quad (x^{-p}y)' = \frac{\ln x}{x} + \frac{A}{x}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}(\ln x)^2 = \frac{\ln x}{x}$ であるから、

$$x^{-p}y = \tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + A\ln x + B, \qquad \text{よって} \qquad y = x^p\left(\tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + A\ln x + B\right).$$

どちらの場合も、A と B を含む部分は小問 (i) で $q = 0$ とした余関数（complementary function）であり、当然そうなるべきものである。

検算

- $p = q = 0$ とすると、方程式は $x^2y'' + xy' = 0$、すなわち $(xy')' = 0$ であるから $y = A\ln x + B$ となり、小問 (i) と一致する。
- 斉次方程式（homogeneous equation）に $y = x^m$ を代入してみる：$m(m-1) + (1-2p)m + p^2 - q^2 = (m-p)^2 - q^2$ であるから $m = p \pm q$ であり、$q = 0$ のとき重根となる。これは求めた結果のとおりである。
- 小問 (ii) で $n = p = 1$ のとき、$y = \frac{1}{2}x(\ln x)^2$ は $y' = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$、$y'' = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$ を満たすので、$x^2y'' - xy' + y = x\ln x + x - \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2 = x$ となり、求めるとおりである。
- すべての解について、p、q、n、x の多数のランダムな値でコンピュータにより方程式に代入し直すことも行った。残差は丸め誤差の範囲（10^{-6} 程度）で 0 であった。

よくある間違い

- (i) の $q = 0$ の場合や (ii) の $n = p$ の場合を忘れること。これらの場合には、べき関数の積分公式の代わりに $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln x$ を用いる。
- 最初の段階で積分定数を落とすこと。2 つ目の独立な解を生み出すのはこの定数である。

- 理由を述べずに $a+b+c=2$ を仮定すること。これは y'' に x^2 が掛かるようにするために必要なのである。

STEP のその先へ

2 階の作用素を 1 階の作用素の合成として書くことを、作用素の**因数分解**（factorising）という。これは階数低下法（reduction of order）の背後にある考え方であり、量子力学における昇降演算子（ladder operators）の背後にある考え方でもある。置換 $x=\mathrm{e}^t$ によって、任意のオイラーの方程式は定数係数の方程式に変換される。このことから、重根 $m=p$ と因子 $\ln x$（すなわち t）が現れる理由が説明できる。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、オイラーの方程式と階数低下法が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。