解答例

STEP III 2018、第 2 問

純粋数学 ・ エルミート多項式

STEP III 2018、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s3-q2

鍵となる考え方

定義を逆向きに読むと、これは z の第 n 次導関数（nth derivative）が $(-1)^n y_n z$ であることを述べている。これをもう一度微分し、$n+1$ に対する同じ主張と比べれば、小問 (i) は一行で示せる。その後は、小問 (i) が漸化式（recurrence）を微分するための道具となり、これが (ii) の数学的帰納法（induction）を推し進める。最後の不等式は、(ii) の恒等式（identity）から、二度目のごく短い帰納法によって導かれる。

解答

以下を通じて $z = \mathrm{e}^{-x^2}$ とする。よって $z' = -2xz$ であり、すべての x に対して $z > 0$ である。定義を変形すると

$$\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^n y_n z \qquad (n \geq 0),$$

となる。$y_0 = 1$ であるから、これは $n = 0$ のときにも成り立つ。

小問 (i)

上に掲げた等式を、積の微分法（product rule）と $z' = -2xz$ を用いて微分すると

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} z}{\mathrm{d}x^{n+1}} = (-1)^n (y_n' z + y_n z') = (-1)^n (y_n' - 2x y_n) z.$$

一方、同じ等式で n を $n+1$ に置き換えると、左辺は $(-1)^{n+1} y_{n+1} z$ である。両者を等しいとおき、決して 0 にならない $(-1)^n z$ で割ると

$$y_n' - 2x y_n = -y_{n+1}, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = 2x y_n - y_{n+1},$$

となり、示すべきことが得られた。ここではどこにも $n \geq 1$ を必要としなかったので、この結果は $n = 0$ に対しても成り立つ。これを後で用いる。

後で使うために記しておく：$z' = -2xz$ および $z'' = (4x^2 - 2)z$ であるから、$y_1 = 2x$、$y_2 = 4x^2 - 2$ である。

小問 (ii)

初期段階（base case）。 $n = 1$ のときは $y_2 = 2xy_1 - 2y_0$ を示せばよいが、実際 $2x \cdot 2x - 2 = 4x^2 - 2 = y_2$ である。

帰納段階（inductive step）。 ある $k \geq 1$ に対して

$$y_{k+1} = 2xy_k - 2ky_{k-1}. \tag{$*$}$$

が成り立つと仮定する。同じ関係式を一段先で得たいので、$(*)$ を微分する：

$$y'_{k+1} = 2y_k + 2xy'_k - 2ky'_{k-1}.$$

> **考えてみよう** 導関数をどうやって消去すればよいか。また、$k = 1$ のとき、y_{k-1} に対して小問 (i) を用いてよいか。

すべての導関数を小問 (i) を用いて置き換える。$k = 1$ のときの y'_{k-1} については、これは $n = 0$ の場合であり、先に注意したとおりこれも成り立つ。こうして

$$2xy_{k+1} - y_{k+2} = 2y_k + 2x(2xy_k - y_{k+1}) - 2k(2xy_{k-1} - y_k),$$

を得るので

$$y_{k+2} = 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4kx\, y_{k-1}.$$

y_{k-1} を含む項は、仮定 $(*)$ をもう一度用いて消去する：$2ky_{k-1} = 2xy_k - y_{k+1}$ であるから $4kx\, y_{k-1} = 4x^2y_k - 2xy_{k+1}$ である。これを代入すると

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4x^2y_k - 2xy_{k+1} \\ &= 2xy_{k+1} - 2(k+1)y_k, \end{aligned}$$

となり、これは k を $k+1$ に置き換えた関係式である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ に対して $y_{n+1} = 2xy_n - 2ny_{n-1}$ が成り立つ。

結論の導出。 漸化式を二回、すなわち n のときと $n+1$ のときに用いて、両方の積に項 $2xy_ny_{n+1}$ が現れるようにする：

$$\begin{aligned} y_{n+1}^2 &= y_{n+1}(2xy_n - 2ny_{n-1}) = 2xy_ny_{n+1} - 2ny_{n-1}y_{n+1}, \\ y_ny_{n+2} &= y_n(2xy_{n+1} - 2(n+1)y_n) = 2xy_ny_{n+1} - 2(n+1)y_n^2. \end{aligned}$$

辺々引くと、x を含む項が打ち消し合う：

$$y_{n+1}^2 - y_n y_{n+2} = 2(n+1)y_n^2 - 2ny_{n-1}y_{n+1} = 2n(y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}) + 2y_n^2,$$

これが求める恒等式である。

小問 (iii)

$D_n = y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}$ とおく。(ii) の恒等式は

$$D_{n+1} = 2nD_n + 2y_n^2 \qquad (n \geq 1).$$

と書ける。すべての $n \geq 1$ に対して $D_n > 0$ であることを数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のとき、すべての x に対して

$$D_1 = y_1^2 - y_0 y_2 = 4x^2 - (4x^2 - 2) = 2 > 0$$

である。ある $n \geq 1$ に対して $D_n > 0$ ならば、$n \geq 1$ であるから $2nD_n > 0$ であり、また $2y_n^2 \geq 0$ であるので、$D_{n+1} > 0$ となる。したがって、すべての $n \geq 1$ とすべての実数 x に対して $y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} > 0$ が成り立ち、示すべきことが得られた。

狭義の不等式を得るためには D_n が正であることが必要だった点に注意しよう：y_n^2 だけでは、y_n の零点において 0 になりうる。

検算

- 漸化式から $y_3 = 2x(4x^2 - 2) - 4 \cdot 2x = 8x^3 - 12x$ である。$z'' = (4x^2 - 2)z$ を直接微分すると $z''' = (-8x^3 + 12x)z$ となり、$-y_3 z$ と一致する。
- $n = 1$ における小問 (i)：$y_1' = 2$ であり、$2x \cdot 2x - (4x^2 - 2) = 2$ である。✓
- $n = 2$ における小問 (iii)：$D_2 = (4x^2 - 2)^2 - 2x(8x^3 - 12x) = 8x^2 + 4$ であり、これは正で、恒等式が予言するとおり $2D_1 + 2y_1^2 = 4 + 8x^2$ に等しい。
- 漸化式と不等式を、x の多数の有理数値（各 y_n の零点の近くを含む）において $n = 14$ までコンピュータで確かめたところ、厳密に一致した。

よくある間違い

- 帰納段階で y_{k-1} に対して小問 (i) を用いており、$k = 1$ のときそれは y_0 を意味することを忘れる：小問 (i) は $n \geq 1$ についてしか問われていないので、$n = 0$ の場合を別に確かめること。
- 小問 (iii) で $D_{n+1} \geq 0$ しか結論しない：狭義の不等式は $D_n > 0$ から得られるのであって、y_n^2 からではない。

STEP のその先へ

関数 y_n はエルミート（Hermite）多項式（Hermite polynomials）$H_n(x)$ であり、関係式 $\mathrm{d}^n z/\mathrm{d}x^n = (-1)^n H_n z$ はそのロドリゲスの公式（Rodrigues formula）である。これらは実数直線全体の上で重み（weight）e^{-x^2} に関して直交（orthogonal）し、量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）のエネルギー状態を与える。(iii) の不等式はトゥラン（Turán）型不等式（Turán-type inequality）であり、これは多くの古典的直交多項式について成り立つ一群の結果である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）では、級数解（series solutions）を通してエルミートの微分方程式（Hermite's equation）に出会う。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。