解答例

STEP III 2018、第 13 問

確率・統計 ・ ポアソン分布

> **STEP III 2018、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q13

鍵となる考え方

確率母関数（probability generating function）に $t = -1$ を代入すると、各確率に符号 $(-1)^r$ が付く。したがって $G(1)$ と $G(-1)$ の平均をとれば奇数番目の項が打ち消し合い、偶数番目の項だけが残る。同じふるい分けを 1 の 4 乗根（fourth roots of unity）$1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$ で行えば、4 の倍数の項が取り出せる。新しい母関数がそれぞれ閉じた形（closed form）で表せれば、平均（mean）は $t = 1$ における導関数の値にすぎず、問題は初等関数どうしの比較に帰着する。

解答

$p_r = \mathrm{P}(X = r)$ とおくと、$G(t) = \sum_{r \geq 0} p_r t^r$ である。

偶数の値。 $t = 1$ と $t = -1$ における級数を足し合わせると、

$$G(1) + G(-1) = \sum_{r \geq 0} p_r (1 + (-1)^r) = 2 \sum_{r \text{ は偶数}} p_r$$

となる。$1 + (-1)^r$ は偶数の r に対しては 2、奇数の r に対しては 0 だからである。両辺を 2 で割れば求める結果が得られる。（$\sum p_r = 1$ であるから、どちらの級数も絶対収束（converge absolutely）する。）

ポアソン分布の母関数。 $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^r / r!$ のとき、

$$G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{r \geq 0} \frac{(\lambda t)^r}{r!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-t)},$$

である。ここで、すべての t に対して収束する指数関数の級数展開（exponential series）を用いた。

小問 (i)

Y の確率の総和は 1 でなければならないから、k は $\mathrm{P}(X \text{ が偶数})$ の逆数である。最初の結果により、

$$\mathrm{P}(X \text{ が偶数}) = \tfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2\lambda}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cosh\lambda, \qquad \text{よって} \qquad k = \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}.$$

Y の母関数は G の偶数番目の項だけを残したものである：

$$\begin{aligned} G_Y(t) = k \sum_{r \text{ は偶数}} p_r t^r &= k\cdot\tfrac{1}{2}(G(t)+G(-t)) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{-\lambda t}) = \frac{\cosh\lambda t}{\cosh\lambda}, \end{aligned}$$

ここで $\frac{1}{2}(G(t)+G(-t))$ は G の偶関数部分であり、最初の結果で 1 の代わりに t としたものにほかならない。これが求める形である。

平均は $G_Y'(1)$ である：

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{\lambda\sinh\lambda}{\cosh\lambda} = \lambda\tanh\lambda.$$

$\lambda > 0$ のとき $\mathrm{e}^{-\lambda} > 0$ であるから、$\sinh\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}) < \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}) = \cosh\lambda$ となり、$0 < \tanh\lambda < 1$ が成り立つ。ゆえに $\mathrm{E}(Y) < \lambda$ であり、題意は示された。

小問 (ii)

今度は r が 4 の倍数である項だけを残す必要がある。

> **考えてみよう** 2 ではなく 4 の倍数でふるい分けたいとき、$t = -1$ の役割を果たすものは何か。

1 の 4 乗根をすべて用いる。整数 r に対して、

$$1+(-1)^r+\mathrm{i}^r+(-\mathrm{i})^r = \begin{cases} 4 & \text{条件} 4 \mid r, \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

$4 \mid r$ ならば、すべての項が 1 である。r が奇数ならば、$(-1)^r = -1$ かつ $(-\mathrm{i})^r = -\mathrm{i}^r$ であるから、項は 2 つずつ打ち消し合う。$r \equiv 2 \pmod 4$ ならば、各項は $1+1-1-1=0$ となる。よって

$$\sum_{4\mid r}\frac{x^r}{r!} = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \tfrac{1}{2}(\cosh x+\cos x).$$

（これは直接確かめることもできる。$\cosh x = \sum_{r\text{ は偶数}} x^r/r!$ であり、$\cos x$ は同じ項に符号 $+,-,+,\ldots$ を付けたものであるから、両者を足すと $4 \mid r$ の項は 2 倍になり、残りは打ち消し合う。）

$x = \lambda t$ とおいて $\mathrm{e}^{-\lambda}$ を掛け、さらに $G_Z(1) = 1$ となるように c を定めると、

$$G_Z(t) = \frac{\cosh \lambda t + \cos \lambda t}{\cosh \lambda + \cos \lambda}.$$

を得る。$\cosh \lambda > 1 \geq -\cos \lambda$ であるから、$\lambda > 0$ のとき分母は正である。微分して $t = 1$ とおくと、

$$\mathrm{E}(Z) = G_Z'(1) = \frac{\lambda(\sinh \lambda - \sin \lambda)}{\cosh \lambda + \cos \lambda}.$$

$\lambda > 0$ であり分母は正であるから、

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) < \lambda &\iff \sinh \lambda - \sin \lambda < \cosh \lambda + \cos \lambda \\ &\iff \sin \lambda + \cos \lambda > \sinh \lambda - \cosh \lambda = -\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &\iff \sin \lambda + \cos \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} > 0. \end{aligned}$$

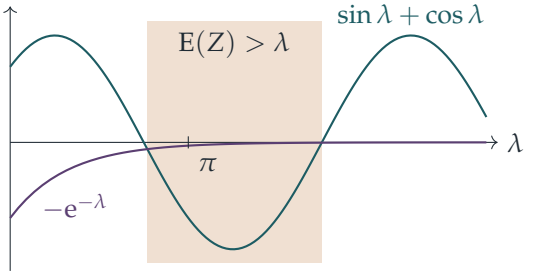
これは $\lambda = \pi$ で成り立たない。実際、$\mathrm{e}^{-\pi} < 1$ であるから $\sin \pi + \cos \pi + \mathrm{e}^{-\pi} = -1 + \mathrm{e}^{-\pi} < 0$ となる。具体的には

$$\mathrm{E}(Z)|_{\lambda=\pi} = \frac{\pi \sinh \pi}{\cosh \pi - 1} > \pi,$$

である。$\sinh \pi > \cosh \pi - 1$（これは $1 > \mathrm{e}^{-\pi}$ と同値）だからである。

したがって答えは**否**である。$\mathrm{E}(Z) < \lambda$ はすべての正の λ に対して成り立つわけではない。

全体像をつかむために、$\sin \lambda + \cos \lambda = \sqrt{2} \sin(\lambda + \frac{\pi}{4})$ と書き直す。この曲線が $-\mathrm{e}^{-\lambda}$ より下に来るとき、条件は成り立たない。そのような最初の区間はおよそ $\lambda \approx 2.42$ から $\lambda \approx 5.49$ までであり、それ以降の区間は $\mathrm{e}^{-\lambda} \to 0$ に伴って $(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2n\pi)$ にどんどん近づいていく。



検算

- $\lambda \to 0$ のとき、$\mathrm{E}(Y) = \lambda \tanh \lambda \approx \lambda^2$ である。これは理にかなっている。Y はほとんど常に 0 であり、$\mathrm{P}(Y = 2) \approx \lambda^2/2$ だからである。
- $\lambda \to \infty$ のとき $\tanh \lambda \to 1$ であるから、$\mathrm{E}(Y)$ は λ よりわずかに小さい値になる。λ が大きいとポアソン分布は広く散らばるので、奇数の値を捨てても平均はほとんど動かない。
- コンピュータでポアソン分布の級数を直接足し合わせ、すべての母関数と 2 つの平均を確認した。たとえば $\lambda = \pi$ のとき、$\mathrm{E}(Y) \approx 3.1299 < \pi$、$\mathrm{E}(Z) \approx 3.4254 > \pi$ となる。また、$\sin \lambda + \cos \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}$ の符号が変わる点が $\lambda \approx 2.419$ と 5.495 にあることも確かめた。

よくある間違い

- 正規化定数（normalising constant）を忘れること。$\cosh \lambda t$ だけでは母関数にならない。$t = 1$ での値が 1 にならないからである。
- (i) からの類推で、(ii) の答えも「成り立つ」に違いないと思い込むこと。4 の倍数だけを残すと、λ より下の確率の重みが上の重みより多く取り除かれることがある。たとえば $\lambda = \pi$ のとき、許される値のうち最も近い 4 は π より大きく、しかも 0 よりはるかに大きな確率をもつ。
- $\cosh \lambda + \cos \lambda$ が正であることを確かめずに、不等式をそれで割ること。

STEP のその先へ

1 つの剰余類（residue class）に属する項を取り出すために母関数を 1 の冪根にわたって平均する方法は、**1 の冪根フィルター**（roots-of-unity filter）（または級数の**多重分割**（multisection））と呼ばれる。これは組合せ論（combinatorics）の基本的な道具であり、離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）の最も簡単な場合でもある。ここで行ったように、分布をある事象で条件付けてから平均を計算し直すという操作は、確率論のいたるところに現れる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数を詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。