解答例

STEP III 2018、第 11 問

力学 ・ たるんだ糸と放物運動

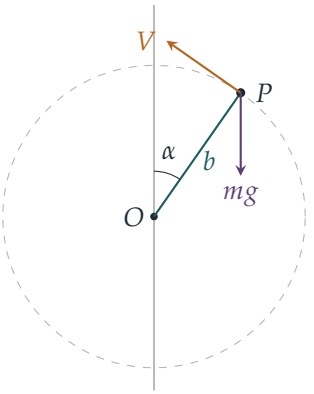
> **STEP III 2018、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q11

鍵となる考え方

糸がたるむのは張力（tension）がゼロになる瞬間であるから、その瞬間における半径方向の運動方程式（equation of motion）から V が求まる。その後、質点は通常の放物運動をする物体（projectile）となり、質点の O からの距離が再び b に戻ったときに糸は再びぴんと張る。O を原点とする座標で考えると、この条件は見事に簡単になる。放物運動が円周上から接線（tangent）方向の運動として始まるからである。最後の小問は、糸が急に張る瞬間（jerk）の速度がちょうど糸の方向を向いているかどうかという問題に帰着する。

解答

質点を、軽くて伸びない糸につながれた質量 m の点とみなし、空気抵抗は無視する。O を原点とし、x 軸を水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。質点は反時計回りに回り、鉛直上向きの右側にある点 P で糸がたるむとする。



P において糸は鉛直上向きと角 α をなすので、$P = (b\sin\alpha,\, b\cos\alpha)$ である。そこでの速度は糸に垂直で、上方へ、頂点を越える向きである：

$$\mathbf{v}_P = V(-\cos\alpha,\, \sin\alpha).$$

糸がたるむときの速さ

糸に沿って O の向きに力を分解する。張力 R は O の向きにはたらき、P は O より上にあるので、重力も O の向きに成分 $mg\cos\alpha$ をもつ。質点は半径 b の円運動をしているから

$$R + mg\cos\alpha = \frac{mV^2}{b}.$$

糸がたるむのは $R = 0$ のときであるから

$$V^2 = gb\cos\alpha, \qquad V = \sqrt{gb\cos\alpha}.$$

糸が再び張るとき

糸がたるむと、質点は放物運動をする。時刻 t における位置は

$$x = b\sin\alpha - Vt\cos\alpha, \qquad y = b\cos\alpha + Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

糸が再び張るのは $x^2 + y^2 = b^2$ となるときである。展開すると

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= b^2\sin^2\alpha - 2bVt\sin\alpha\cos\alpha + V^2t^2\cos^2\alpha \\ &\quad + b^2\cos^2\alpha + V^2t^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4 + 2bVt\sin\alpha\cos\alpha - bgt^2\cos\alpha - gVt^3\sin\alpha \\ &= b^2 + \left(V^2 - gb\cos\alpha\right)t^2 - gVt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4. \end{aligned}$$

t の項が打ち消し合うのは質点が接線方向に動き始めるからであり、t^2 の項が打ち消し合うのは $V^2 = gb\cos\alpha$ だからである。したがって

$$x^2 + y^2 - b^2 = gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - V\sin\alpha\right).$$

$0 < t < 4V\sin\alpha/g$ ではこれは負であるから、質点は円の真に内側にあり、糸はたるんだままである。これが再びゼロになり（その後は正になる）のは、次を満たす時刻 T である：

$$gT = 4V\sin\alpha,$$

これが示すべきことであった。

直前の運動の向き

時刻 T における速度の成分は

$$\dot{x} = -V\cos\alpha, \qquad \dot{y} = V\sin\alpha - gT = V\sin\alpha - 4V\sin\alpha = -3V\sin\alpha.$$

よって質点は左下に向かって運動しており、その軌道が水平方向となす角 β は

$$\tan\beta = \frac{|\dot{y}|}{|\dot{x}|} = \frac{3V\sin\alpha}{V\cos\alpha} = 3\tan\alpha,$$

を満たす。これが示すべきことであった。

静止する条件

考えてみよう 質点がぴたりと止まるためには、速度について何が成り立たなければならないか。

糸が急に張ることで失われるのは、運動量（momentum）のうち糸に沿った成分だけである。糸に垂直な成分は変化しないので、質点が静止するための必要十分条件は、その垂直成分がもともとゼロであること、すなわち直前の速度が糸 $\overrightarrow{OQ}$ に平行であることである。ここで Q は時刻 T における質点の位置である。（$\dot{x} = -V\cos\alpha \neq 0$ であるから、速度そのものはゼロではない。）

$V^2 = gb\cos\alpha$ と $T = 4V\sin\alpha/g$ を用いると

$$x(T) = b\sin\alpha - \frac{4V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = b\sin\alpha\,(1 - 4\cos^2\alpha),$$
$$y(T) = b\cos\alpha + \frac{4V^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{8V^2\sin^2\alpha}{g} = b\cos\alpha\,(1 - 4\sin^2\alpha).$$

ベクトル (x, y) と $(\dot{x}, \dot{y})$ が平行であるための必要十分条件は $x\dot{y} - y\dot{x} = 0$ である。$-bV$ で割ると

$$3\sin^2\alpha\,(1 - 4\cos^2\alpha) - \cos^2\alpha\,(1 - 4\sin^2\alpha) = 0.$$

$S = \sin^2\alpha$ とおくと、$\cos^2\alpha = 1 - S$ かつ $1 - 4\cos^2\alpha = 4S - 3$ であるから

$$\begin{aligned} 3S(4S-3) - (1-S)(1-4S) &= 0 \\ 12S^2 - 9S - (1 - 5S + 4S^2) &= 0 \\ 8S^2 - 4S - 1 &= 0, \end{aligned}$$

よって $S = \frac{1}{16}(4 \pm \sqrt{16+32}) = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{3})$ である。$S = \sin^2\alpha > 0$ であるから負の解はありえず、残る解は $(0,1)$ に含まれるので、実際に存在する鋭角に対応する。以上の各段階はすべて逆にたどれるので、糸が張った瞬間に質点が一瞬静止するための必要十分条件は

$$\sin^2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

検算

- 式 $V^2 = gb\cos\alpha$ からは、$\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $V \to 0$ となる。糸が O と同じ高さでたるむのは、質点がそこで止まった場合に限られるので、これは正しい。
- $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$ のとき $\alpha \approx 55.7°$ かつ $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}(3-\sqrt{3})$ であるから、$Q = \left(b\sin\alpha\,(\sqrt{3}-2),\ -\sqrt{3}\,b\cos\alpha\right)$ となり、これは O の左下にある。OQ の傾きは $\sqrt{3}\cot\alpha/(2-\sqrt{3})$、軌道の傾きは $3\tan\alpha$ である。次のとおり、両者は一致する：

  $$3(2-\sqrt{3})\tan^2\alpha = \frac{3(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}.$$

  運動のコンピュータシミュレーションによっても、3 つの結果すべてが確認された。

よくある間違い

- エネルギーだけを用いて V を求めようとすること。エネルギーは V を初速度と結びつけるが、V を b、g、α で定めるのは張力ゼロの条件である。
- P における速度の向きを誤ること。速度は OP に垂直なので、鉛直方向ではなく水平方向と角 α をなす。
- T が糸が張る**最初の**時刻であることの根拠を示し忘れること。因数分解（factorisation）$gt^3(\frac{1}{4}gt - V\sin\alpha)$ がそれを示している。

STEP のその先へ

糸は引くことはできても押すことはできない。したがって、たるむ糸の問題は、実のところ束縛（constraint）がはたらいたりはたらかなかったりする束縛系である。この

一方向の束縛という考え方は、接触力学（contact mechanics）や、不等式による束縛を伴うラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）にも現れる。糸が急に張るときの力は撃力的な束縛力（impulsive constraint force）であり、大学 1 年次の講義で衝突や反発係数（coefficient of restitution）とともに扱われる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、円運動と撃力の両方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。