解答例

STEP III 2018、第 10 問

力学 ・ 実体振り子

> **STEP III 2018、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q10

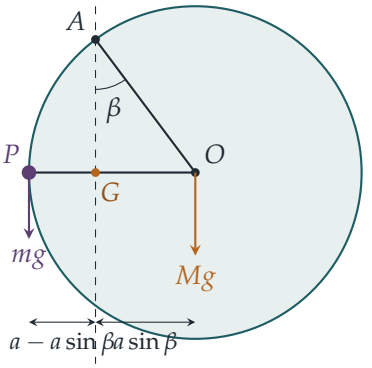
鍵となる考え方

円板と質点は一体となって、固定された軸 L のまわりを回転する一つの剛体（rigid body）をなすので、すべては一つの角で決まる。平衡（equilibrium）の状態では、全体の重心（centre of mass）が A の真下になければならない。これは A のまわりの力のモーメント（moment）のつりあいにほかならない。運動については、軸がなめらか（smooth）でそこにはたらく抗力（reaction）が仕事をしないので、エネルギーが保存される。エネルギーを θ と $\dot{\theta}$ の関数として書き表せば、それを微分（differentiate）することで運動方程式（equation of motion）が得られ、$\sin\theta$ を θ で置き換えれば微小振動（small oscillations）の様子がわかる。

解答

円板を一様な剛体の薄板（uniform lamina）、質点をその縁に固定された点質量（point mass）、軸 L をなめらかなものとしてモデル化する。

平衡。 A のまわりにモーメントをもつ力は、二つの重力、すなわち O にはたらく Mg と P にはたらく mg だけである。A における抗力は A を通る。AO は鉛直下向きと角 β をなすので、O は A から水平方向に距離 $a\sin\beta$ だけ一方の側、たとえば右側にある。このとき重力 Mg は円板を A のまわりに時計回りに回そうとし、これとつりあうことができるのは mg だけであるから、P は A を通る鉛直線の**左側**になければならない。OP は水平で長さが a なので、P が A より左にある水平距離は $a - a\sin\beta$ である。（ここで $a\sin\beta < a$ なので、P は確かに鉛直線の左側にある。）



A のまわりのモーメントを考えると、

$$Mg\,a\sin\beta = mg\,(a - a\sin\beta) \quad\Longrightarrow\quad \sin\beta = \frac{m}{M+m}.$$

O と P はともに A より鉛直方向に距離 $a\cos\beta$ だけ下にある。したがって、AP を斜辺（hypotenuse）とする直角三角形において、水平な辺は $a(1-\sin\beta)$、鉛直な辺は $a\cos\beta$ であり、

$$\begin{aligned} AP^2 &= a^2(1-\sin\beta)^2 + a^2\cos^2\beta = a^2\big(2-2\sin\beta\big) \\ &= 2a^2\Big(1-\frac{m}{M+m}\Big) = \frac{2Ma^2}{M+m}, \end{aligned}$$

となる。よって、求める通り $AP/a = \sqrt{2M/(M+m)}$ である。

全体の重心 G の位置に注目しておくとよい。G は O と P の重み付き平均なので線分 OP 上にあり、したがって A より深さ $a\cos\beta$ だけ下にある。平衡状態では G は A の真下にあるので、

$$AG = a\cos\beta.$$

エネルギー保存。 円板と質点は一つの剛体として運動する。平衡状態では OP は水平であり、OP は物体とともに回転するので、OP が水平と角 θ をなすとき、物体全体は平衡の位置から θ だけ回転している。したがって、その角速度（angular speed）の大きさは $|\dot\theta|$ である。

考えてみよう 質点はどれだけの速さで動いているか？

物体上のすべての点は、軸を中心とする円周上を動く。質点は A から一定の距離 AP を保つので、その速さは $AP\,|\dot\theta|$ であり、運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}m\,AP^2\,\dot\theta^2 = \tfrac{1}{2}m\cdot 2a^2(1-\sin\beta)\,\dot\theta^2 = (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2,$$

となる。ここで上で求めた $AP^2 = 2a^2(1-\sin\beta)$ を用いた。円板の運動エネルギーは $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ である。

位置エネルギー（potential energy）については、全質量 $M+m$ が G に集中しているとみなせばよい。直線 AG は平衡状態で鉛直であり、これも θ だけ回転しているので、G はいま A より深さ $a\cos\beta\cos\theta$ だけ下にある。平衡の位置を位置エネルギーの基準にとると、

$$\text{位置エネルギー} = (M+m)g\big(a\cos\beta - a\cos\beta\cos\theta\big) = (M+m)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta).$$

軸はなめらかであり、A における抗力は動かない点にはたらくので、仕事をしない。ほかにはたらく力は重力だけであり、これは保存力（conservative force）である。よって、運動エネルギーと位置エネルギーの和は一定であり、

$$\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + (1-\sin\beta)\,ma^2\dot{\theta}^2 + (m+M)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta) = \text{一定},$$

これが求める結果である。

微小振動。 t で微分すると、

$$\dot{\theta}\Big[\big(I + 2(1-\sin\beta)ma^2\big)\ddot{\theta} + (M+m)ga\cos\beta\,\sin\theta\Big] = 0.$$

$\dot{\theta}\neq 0$ のときは括弧内が 0 でなければならず、連続性によって括弧内はすべての時刻で 0 となる。θ が小さいとき $\sin\theta\approx\theta$ であるから、

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{(M+m)ga\cos\beta}{I + 2(1-\sin\beta)ma^2},$$

となり、これは周期（period）$2\pi/\omega$ の単振動（simple harmonic motion）である。

ここで $m = \frac{3}{2}M$ とおく。すると $\sin\beta = \dfrac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}$ であり、β は鋭角なので $\cos\beta = \frac{4}{5}$ である。分子は

$$\tfrac{5}{2}M\cdot ga\cdot\tfrac{4}{5} = 2Mga,$$

であり、$I = \frac{3}{2}Ma^2$ のとき分母は

$$\tfrac{3}{2}Ma^2 + 2\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{2}Ma^2 = \tfrac{3}{2}Ma^2 + \tfrac{6}{5}Ma^2 = \tfrac{27}{10}Ma^2.$$

よって $\omega^2 = \dfrac{20g}{27a}$ であり、周期は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{27a}{20g}} = 2\pi\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3a}{5g}} = 3\pi\sqrt{\frac{3a}{5g}},$$

となる。ここで $\sqrt{27/20} = \sqrt{9\cdot 3/(4\cdot 5)} = \frac{3}{2}\sqrt{3/5}$ を用いた。これが求める周期である。

検算

- $m = 0$ とすると $\sin\beta = 0$、$AP/a = \sqrt{2}$ となる。円板は O が A の真下にくるようにぶら下がり、O と同じ高さにある縁の点は確かに A から $\sqrt{2}a$ の距離にある。周期は $2\pi\sqrt{(3a/2)/g}$ となり、縁の一点を支点とする円板についてよく知られた結果と一致する。
- 運動エネルギーの項を足し合わせると $\frac{1}{2}(I + m\,AP^2)\dot{\theta}^2$ となり、L のまわりの物体全体の慣性モーメント（moment of inertia）が現れる。これは当然そうあるべきものである。
- $m = \frac{3}{2}M$、$a = 0.5\,\mathrm{m}$ としてこの剛体の運動を時間刻みで数値シミュレーションしたところ、微小振動の周期は $1.64815\,\mathrm{s}$ となった。公式からは $3\pi\sqrt{1.5/49.05} \approx 1.64815\,\mathrm{s}$ が得られる。また、このシミュレーションでは、大きく振れる場合にもエネルギーの式が一定に保たれることが確かめられた。

よくある間違い

- P を鉛直線に関して O と同じ側に置いてしまう。そうすると二つの重力が物体を同じ向きに回そうとするので、平衡はありえない。
- 質点の軸からの距離として AP ではなく a を使ってしまう。質点は O ではなく A を中心とする円周上を動く。
- O と P の位置エネルギーを別々に求めようとして、三角関数の計算で迷子になる。A から距離 $a\cos\beta$ の位置にある全体の重心 G を使うほうがはるかにすっきりする。

STEP のその先へ

これは**実体振り子**（compound pendulum）である。固定された軸のまわりを振れる剛体はどれも、長さ $I_{\text{全体}}/\big((M+m)h\big)$ の単振り子（simple pendulum）と同じように振動する。ここで h は軸から重心までの距離である。ここで用いたエネルギーによる方法は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の一変数の場合にあたる。ラグランジュ力学では、運動エネルギーと位置エネルギーを一つの一般化座標（generalised coordinate）で書き表し、そこから運動方程式を導く。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と実体振り子を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。