解答例

STEP III 2018、第 1 問

純粋数学 • 2 次方程式の解と不等式

> **STEP III 2018、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q1

鍵となる考え方

解と係数の関係（Vieta's formulas）を使うと、u と v の二つの対称式（symmetric expression）はどちらも係数 α と β の簡単な関数に書き直せる。一方の式の値を固定すれば α を消去でき、もう一方の式は β だけの関数になる。それがちょうど小問 (i) でグラフを描いた二つの関数のいずれかである。さらに u と v が実数であるという条件（判別式（discriminant）≥ 0）から、曲線のどの範囲を使ってよいかがわかり、あとはグラフが答えを教えてくれる。

解答

小問 (i)

曲線 $y = \mathrm{f}(\beta)$　微分すると

$$\mathrm{f}'(\beta) = 1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 + \beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta+1)(\beta^2 - \beta + 2)}{\beta^3},$$

となる。ここで、3 次式の解 $\beta = -1$ を見つけて因数分解した。2 次の因数の判別式は $1 - 8 < 0$ であるから、この因数はつねに正である。したがって停留点（stationary point）は $\beta = -1$ のみであり、そこでの値は

$$\mathrm{f}(-1) = -1 + 1 - 1 = -1.$$

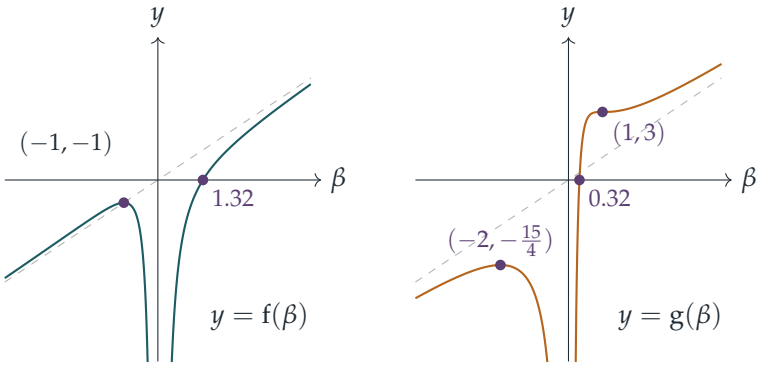
である。符号を調べる。$-1 < \beta < 0$ では分子が正で $\beta^3 < 0$ であるから $\mathrm{f}' < 0$ である。$\beta < -1$ では分子も分母も負であるから $\mathrm{f}' > 0$ である。よって $(-1, -1)$ は**極大点**であり、すべての $\beta < 0$ に対して $\mathrm{f}(\beta) \leq -1$ が成り立つ。$\beta > 0$ ではすべてが正であるから、f はそこで増加する。

端での振る舞い：$\beta \to 0$ のとき、どちら側から近づいても項 $-1/\beta^2$ が支配的となり、$f \to -\infty$ である。$\beta \to \pm\infty$ のとき $f(\beta) - \beta \to 0$ であるから、$y = \beta$ は斜めの漸近線（oblique asymptote）である。曲線は $\beta^3 - \beta - 1 = 0$ となる点、すなわち $\beta \approx 1.32$ で軸と 1 回だけ交わる。

曲線 $y = g(\beta)$　同様に

$$g'(\beta) = 1 - \frac{3}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 - 3\beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta-1)^2(\beta+2)}{\beta^3}.$$

停留点は $\beta = -2\,(g(-2) = -2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{15}{4})$ と $\beta = 1\,(g(1) = 3)$ である。$-2 < \beta < 0$ では $g' < 0$、$\beta < -2$ では $g' > 0$ であるから、$(-2, -\frac{15}{4})$ は極大点であり、すべての $\beta < 0$ に対して $g(\beta) \le -\frac{15}{4}$ である。$\beta > 0$ では $g' \ge 0$ であり、等号が成り立つのは $\beta = 1$ のときに限る。そこで導関数の符号は変わらないので、$(1, 3)$ は停留変曲点（stationary point of inflection）であり、g は $\beta > 0$ で増加する。やはり $\beta \to 0$ のとき $g \to -\infty$ であり、$y = \beta$ は漸近線で、零点は $\beta \approx 0.32$（$\beta^3 + 3\beta - 1 = 0$ の解）の一つだけである。



破線は漸近線 $y = \beta$ である。

小問 (ii)

解と係数の関係より $u + v = -\alpha$、$uv = \beta$ である（また $\beta \neq 0$ であるから $uv \neq 0$）。よって

$$u + v + \frac{1}{uv} = -\alpha + \frac{1}{\beta}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \frac{u+v}{uv} + uv = \beta - \frac{\alpha}{\beta}.$$

小問 (iii)

条件 $-\alpha+\frac{1}{\beta}=-1$ から $\alpha=1+\frac{1}{\beta}$ である。これを二つ目の式に代入すると

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv=\beta-\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=\beta-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta^2}=\mathrm{f}(\beta).$$

したがって、許されるすべての β に対して $\mathrm{f}(\beta)\le -1$ を示せばよい。

考えてみよう 曲線 $y=\mathrm{f}(\beta)$ は $+\infty$ へ伸びていくので、この不等式がすべての β で成り立つことはありえない。では、何が β を大きくさせないのだろうか。

それは u と v が実数であるという条件である。解が実数となるのは $\alpha^2\ge 4\beta$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\ge 4\beta \iff (\beta+1)^2\ge 4\beta^3 \iff 4\beta^3-\beta^2-2\beta-1\le 0,$$

である。ここで両辺に $\beta^2>0$ を掛けた。$\beta=1$ はこの 3 次式の解であり、

$$4\beta^3-\beta^2-2\beta-1=(\beta-1)(4\beta^2+3\beta+1).$$

2 次の因数の判別式は $9-16<0$ であるから、この因数はつねに正である。したがって、解が実数となるのは $\beta\le 1$（ただし $\beta\ne 0$）のとき、かつそのときに限る。

- $\beta<0$ のとき：小問 (i) より $\mathrm{f}(\beta)\le \mathrm{f}(-1)=-1$。
- $0<\beta\le 1$ のとき：f は $\beta>0$ で増加するので、$\mathrm{f}(\beta)\le \mathrm{f}(1)=1-1-1=-1$。

いずれの場合も $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv\le -1$ となり、示すべきことが示された。等号は $\beta=-1$（$\alpha=0$、解は ±1）と $\beta=1$（$\alpha=2$、重解（double root）-1）のときに成り立つ。

小問 (iv)

今度は $-\alpha+\frac{1}{\beta}=3$ であるから $\alpha=\frac{1}{\beta}-3$ であり、

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv=\beta-\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-3\right)=\beta+\frac{3}{\beta}-\frac{1}{\beta^2}=\mathrm{g}(\beta).$$

解が実数となるのは $\alpha^2\ge 4\beta$ のときである：

$$\left(\frac{1}{\beta}-3\right)^2\ge 4\beta \iff (1-3\beta)^2\ge 4\beta^3 \iff 4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1\le 0.$$

ここでも $\beta=1$ は解であり、しかも今回は重解である：

$$4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1=(\beta-1)(4\beta^2-5\beta+1)=(\beta-1)^2(4\beta-1).$$

$(\beta-1)^2 \geq 0$ であるから、この 3 次式が ≤ 0 となるのは $\beta \leq \frac{1}{4}$ または $\beta = 1$ のとき、かつそのときに限る。よって許される値は $\beta < 0$、$0 < \beta \leq \frac{1}{4}$、そして孤立した値 $\beta = 1$ である。

? **考えてみよう** 最大値は単純に区間の右端での値 $g(\frac{1}{4})$ だろうか。

そうとは限らない。孤立点（isolated point）を見落としてはならない。三つの部分それぞれについて調べる：

- $\beta < 0$：小問 (i) より $g(\beta) \leq -\frac{15}{4}$。
- $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$：g は増加するので、$g(\beta) \leq g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + 12 - 16 = -\frac{15}{4}$。
- $\beta = 1$：$g(1) = 3$。

したがって $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv$ の最大値は $\boxed{3}$ であり、これは $\beta = 1$、$\alpha = -2$、すなわち $u = v = 1$ のときにとる。（実際、どちらの式も $1+1+1 = 3$ となる。）この重解がなければ、$-\frac{15}{4}$ より大きい値はとりえない。

検算

- $u = v = 1$ を両方の式に代入すると、どちらも 3 となり、小問 (iv) と一致する。$u = v = -1$ を代入すると、どちらも -1 となり、これは小問 (iii) の等号成立の場合である。
- 小問 (iv) で $\beta = \frac{1}{4}$ としてみる。$\alpha = 1$ であり、$x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$ であるから $u = v = -\frac{1}{2}$ である。このとき $u + v + \frac{1}{uv} = -1 + 4 = 3$、$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = -4 + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$ となり、主張どおりである。
- 実数解を与える β を無作為に数千個とってコンピュータで調べたところ、小問 (iii) では -1 を超える値は見つからず、小問 (iv) では $\beta = 1$ を除いて -3.75 を超える値は見つからなかった。

よくある間違い

- 判別式の条件を忘れ、小問 (iii) で上界は存在しないと結論してしまう。
- $(\beta-1)^2(4\beta-1) \leq 0$ を単に $\beta \leq \frac{1}{4}$ と解いて $\beta = 1$ を見落とし、答えを 3 ではなく $-\frac{15}{4}$ としてしまう。
- 不等式 $\alpha^2 \geq 4\beta$ に β^2 ではなく（負かもしれない）β を掛けてしまう。

STEP のその先へ

これは小さな制約つき最適化（constrained optimisation）の問題である。実数解を与える係数の集合の上で関数を最大化するのであり、その集合には区間だけでなく孤立点も含まれうる。集合上での関数の最大値は、停留点や区間の端でとるとは限らない。だからこそ、解析学や最適化では実行可能集合（feasible set）を注意深く記述することがきわめて重要なのである。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）では、一般の集合上の連続関数の最大値・最小値が丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。