解答例

STEP II 2018、第 9 問

力学 ・ 重力下での衝突

> **STEP II 2018、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q9

鍵となる考え方

2 つのビーズは常に下向きに同じ加速度（acceleration）g をもつので、互いに**相対的**には等速度で運動する。A が跳ね返った後は、ビーズ間の距離が一定の割合で縮まるので、衝突までの時間がすぐに求まる。最後の部分は純粋にエネルギーと運動量（momentum）の問題である。A が地面に当たるときの速さがわかれば、それが衝突後にどれだけの速さで離れたかがわかり、あとはニュートンの衝突の法則（Newton's experimental law）で片がつく。

解答

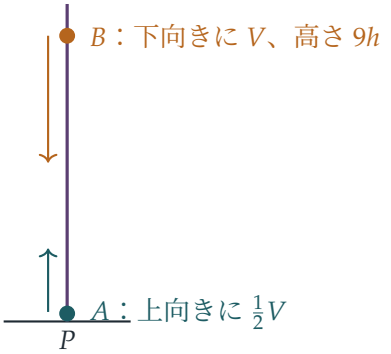
ビーズを、なめらかな鉛直の針金に通された等しい質量 m の質点（particle）とみなし、空気抵抗は無視する。したがって衝突と衝突の間、各ビーズは重力のみを受けて自由に運動する。上向きを正とし、高さは P から測る。

最初の跳ね返りまで

A は静止状態から $8h$ 落下するので、エネルギー保存則（conservation of energy）より

$$V^2 = 2g(8h) = 16gh, \qquad V = 4\sqrt{gh}.$$

同じ時間の間に B も静止状態から $8h$ 落下している（運動はまったく同じである）ので、この瞬間 B は高さ $17h - 8h = 9h$ にあり、速さ V で下向きに運動している。A は地面から上向きに速さ $\frac{1}{2}V$ で跳ね返る。



衝突

A が地面を離れた瞬間から、両方のビーズは加速度 $-g$ で運動するので、A に対する B の相対速度（relative velocity）は、次の初期値のまま変わらない。

$$(-V) - \tfrac{1}{2}V = -\tfrac{3}{2}V.$$

考えてみよう 2 つのビーズがいつ出会うかを求めるとき、なぜ重力を無視してよいのか？

重力は両方の速度を同じ量 $-gt$ だけ変化させるので、差をとると打ち消し合う。したがって $9h$ の間隔は一定の速さ $\frac{3}{2}V$ で縮まり、衝突は跳ね返りから時間

$$\tau = \frac{9h}{\frac{3}{2}V} = \frac{6h}{V} = \frac{6h}{4\sqrt{gh}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

の後に起こる。（その時点で A がまだ空中にあることも必要だが、実際にそうであることがわかる。）そのときの A の高さは

$$H = \tfrac{1}{2}V\tau - \tfrac{1}{2}g\tau^2 = 2\sqrt{gh}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{9h}{4g} = 3h - \frac{9}{8}h = \frac{15}{8}h,$$

となり、題意のとおりである。衝突の直前には、

$$\text{速度}A = \tfrac{1}{2}V - g\tau = 2\sqrt{gh} - \tfrac{3}{2}\sqrt{gh} = \tfrac{1}{2}\sqrt{gh},$$
$$\text{速度}B = -V - g\tau = -4\sqrt{gh} - \tfrac{3}{2}\sqrt{gh} = -\tfrac{11}{2}\sqrt{gh}.$$

したがって A はまだ上昇中であり、

$$u_A = \tfrac{1}{2}\sqrt{gh}\,(\text{上向き}),\qquad u_B = \tfrac{11}{2}\sqrt{gh}\,(\text{下向き}).$$

検算として、B の高さも $9h - V\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 9h - 6h - \frac{9}{8}h = \frac{15}{8}h$ となる。

反発係数

ビーズ間の反発係数（coefficient of restitution）を e とし、衝突直後の両者の速度（上向きを正）を v_A、v_B とする。しばらく $\sqrt{gh}$ を単位として考えると、$u_A = \frac{1}{2}$（上向き）、$u_B = \frac{11}{2}$（下向き）である。

運動量保存（質量は等しく、瞬間的な衝突の間に重力が与える力積（impulse）は無視できる）：

$$v_A + v_B = \tfrac{1}{2} - \tfrac{11}{2} = -5.$$

ニュートンの衝突の法則：ビーズは速さ $\frac{1}{2} + \frac{11}{2} = 6$ で近づき、衝突後は上にある B が、その e 倍の速さで A から遠ざかる。

$$v_B - v_A = 6e.$$

辺々引くと $v_A = -\frac{1}{2}(5 + 6e)$ となるので、A は速さ $w = \frac{1}{2}(5 + 6e)\sqrt{gh}$ で**下向き**に運動する。

さて、A は高さ $\frac{15}{8}h$ から初速 w で落下し、速さ V で地面に達する（$v_B = -5 - v_A = \frac{1}{2}(6e - 5) > v_A$ であるから、このビーズは B より下にあってより速く下向きに運動しており、着地より先に 2 つのビーズが再び出会うことはない）。エネルギー保存より、

$$V^2 = w^2 + 2g \cdot \tfrac{15}{8}h \quad \Longrightarrow \quad w^2 = 16gh - \tfrac{15}{4}gh = \tfrac{49}{4}gh,$$

よって $w = \frac{7}{2}\sqrt{gh}$ である。すると $\frac{1}{2}(5 + 6e) = \frac{7}{2}$ となり、次を得る。

$$e = \frac{1}{3}.$$

衝突後、A は速さ $\frac{7}{2}\sqrt{gh}$、B は速さ $\frac{3}{2}\sqrt{gh}$ で下向きに運動する。

検算

- 運動エネルギー（kinetic energy）：衝突前の総和は $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{1}{4} + \frac{121}{4}) = \frac{61}{4}mgh$、衝突後は $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{49}{4} + \frac{9}{4}) = \frac{29}{4}mgh$ である。$e < 1$ である以上当然のことながら、エネルギーは失われている。
- $e = 1$ なら（質量が等しいので）2 つのビーズは速度を単に入れ替えるだけであり、A は $\frac{11}{2}\sqrt{gh}$ で離れて V より速く着地する。$e = 0$ なら両者は一体となって $\frac{5}{2}\sqrt{gh}$ で動き、A はより遅く着地する。値 $\frac{1}{3}$ はその間に妥当に収まっている。
- 運動全体をコンピュータで逐次シミュレーションする（$g = h = 1$ とする）と、衝突は高さ 1.875 で速さ 0.5 と 5.5 のときに起こり、$e = \frac{1}{3}$ のとき 2 回目の着地の速さは $4 = V$ となる。

よくある間違い

- A が落下している間に B も落下していることを忘れる。跳ね返りの瞬間、B は $17h$ ではなく $9h$ にあり、すでに速さ V で動いている。
- ニュートンの法則での符号の誤り。速度は 1 つの正の向きを決めて書き、遠ざかる速さが正になることを確かめよ。

STEP のその先へ

落下するビーズの一方とともに動く座標系で考えるという工夫は、ガリレイの相対性原理（Galilean relativity）への最初の入り口である。一様な重力場の中では、自由落下する座標系からは重力がまったく見えない。これはアインシュタイン（Einstein）の等価原理（equivalence principle）の出発点である。大学 1 年の力学では、衝突の問題はしばしば重心系（centre-of-mass frame）で解かれる。重心系では、反発係数 e の衝突は両方の速度の向きを逆にし、大きさを e 倍するだけである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この 2 つの考え方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。