解答例

STEP II 2018、第 8 問

純粋数学 ・ ベルヌーイ型微分方程式

> **STEP II 2018、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q8

鍵となる考え方

どちらの方程式もベルヌーイ型微分方程式（Bernoulli equation）である。右辺にある y のべきが線形性（linearity）を損なっているが、y の適切なべきを新しい変数にとれば方程式は線形になる。$y = v^2$（または $y = v^3$）とおくと共通因数 v（または v^2）が約分でき、残るのは定数係数の 1 階線形微分方程式である。これは積分因子（integrating factor）を用いるか、変数分離（separation of variables）によって解ける。概形を描く際に 2 つの曲線を比較するには、両方を 1 つの指数関数 $u = e^{-t/6}$ で表すのが最もすっきりしている。

解答

問題文では $y_1(x)$、$y_2(x)$ と書かれているが、独立変数は一貫して t なので、ここでは $y_1(t)$、$y_2(t)$ と書く。

小問 (i)

$v = \sqrt{y} \geq 0$ として $y = v^2$ とおく。すると $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ かつ $y^{1/2} = v$ であるから、方程式は

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v - \beta v^2.$$

となる。解の 1 つは $v \equiv 0$、すなわち定数解 $y \equiv 0$ である。$v \neq 0$ となるところでは v で割ることができて、

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{2}v = \frac{\alpha}{2}.$$

これは線形であり、積分因子は $e^{\beta t/2}$ である：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ve^{\beta t/2}\right) = \frac{\alpha}{2}e^{\beta t/2} \quad \Longrightarrow \quad ve^{\beta t/2} = \frac{\alpha}{\beta}e^{\beta t/2} + C.$$

したがって一般解（general solution）は

$$\sqrt{y} = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}, \qquad \text{すなわち} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}\right)^2,$$

である。ここで C は定数であり（$v = \sqrt{y} \geq 0$ なので、括弧の中が非負となる範囲で考える）、これに定数解 $y \equiv 0$ が加わる。$C = 0$ とすると、もう 1 つの定数解 $y \equiv \alpha^2/\beta^2$ が得られる。

$y_1(0) = 0$ となるには $v(0) = 0$ が必要なので $C = -\alpha/\beta$ であり、

$$\boxed{y_1(t) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - e^{-\beta t/2}\right)^2}$$

これは定数ではなく、括弧 $1 - e^{-\beta t/2}$ は $t \geq 0$ で非負なので、確かに解である。（v で割る操作は、$v > 0$ となる $t > 0$ で正当であった。）

小問 (ii)

今度はべきが $\frac{2}{3}$ なので、$y^{2/3}$ と y が共通因数をもつようにしたい。$y = v^3$、すなわち $v = y^{1/3} \geq 0$ とおく。すると $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3v^2\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ かつ $y^{2/3} = v^2$ であるから、

$$3v^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v^2 - \beta v^3.$$

考えてみよう 置換 $v = y^{1/3}$ はどのようにして思いつけるだろうか。

小問 (i) では、$v = y^{1-\frac{1}{2}}$ とおくことで両辺が共通因数 v をもった。ベルヌーイ型方程式 $\dot{y} = \alpha y^n - \beta y$ に対しては、置換 $v = y^{1-n}$ が常に有効であり、ここでは $1 - n = \frac{1}{3}$ である。

$v \equiv 0$（定数解 $y \equiv 0$）を除けば、v^2 で割って

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{3}v = \frac{\alpha}{3}.$$

積分因子 $e^{\beta t/3}$ を用いて前とまったく同様にすると、

$$y^{1/3} = \frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}, \qquad \text{すなわち} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}\right)^3,$$

となる。ここで D は定数である（括弧の中は非負とする）。条件 $y_2(0) = 0$ から $D = -\alpha/\beta$ が定まるので、

$$\boxed{y_2(t) = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - e^{-\beta t/3}\right)^3}$$

小問 (iii)

$\alpha = \beta$ のとき、

$$y_1(t) = \left(1 - e^{-t/2}\right)^2, \qquad y_2(t) = \left(1 - e^{-t/3}\right)^3.$$

各曲線の形。 $1 - e^{-t/2}$ と $1 - e^{-t/3}$ はともに 0 から 1 に向かって増加するので、どちらの曲線も 0 から始まって増加する。$t \to \infty$ のとき、どちらも 1 に近づく。これは (i) では定数解 $y = \alpha^2/\beta^2 = 1$、(ii) では $y = \alpha^3/\beta^3 = 1$ である。微分すると

$$y_1' = e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right), \qquad y_2' = e^{-t/3}\left(1 - e^{-t/3}\right)^2,$$

となるので、どちらも原点での傾きは 0 である。$w = e^{-t/2}$ とすると傾き $y_1' = w(1-w)$ は $w = \frac{1}{2}$ で最大となるので、y_1 は $t = 2\ln 2$、$y_1 = \frac{1}{4}$ に変曲点（point of inflection）をもつ。同様に、$w = e^{-t/3}$ とすると $y_2' = w(1-w)^2$ は $w = \frac{1}{3}$ で最大となり、$t = 3\ln 3$、$y_2 = \frac{8}{27}$ に変曲点をもつ。それぞれの曲線は、原点から漸近線（asymptote）$y = 1$ へと立ち上がる S 字形である。

位置関係。 $u = e^{-t/6}$ とおくと、$t > 0$ で $0 < u < 1$ であり、$e^{-t/2} = u^3$、$e^{-t/3} = u^2$ である。すると

$$y_1 = (1-u^3)^2 = (1-u)^2(1+u+u^2)^2, \qquad y_2 = (1-u^2)^3 = (1-u)^3(1+u)^3,$$

であるから

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{(1+u+u^2)^2}{(1-u)(1+u)^3}.$$

展開すると、$(1+u+u^2)^2 = 1 + 2u + 3u^2 + 2u^3 + u^4$ および $(1-u)(1+u)^3 = (1-u^2)(1+u)^2 = 1 + 2u - 2u^3 - u^4$ である。分子から分母を引くと

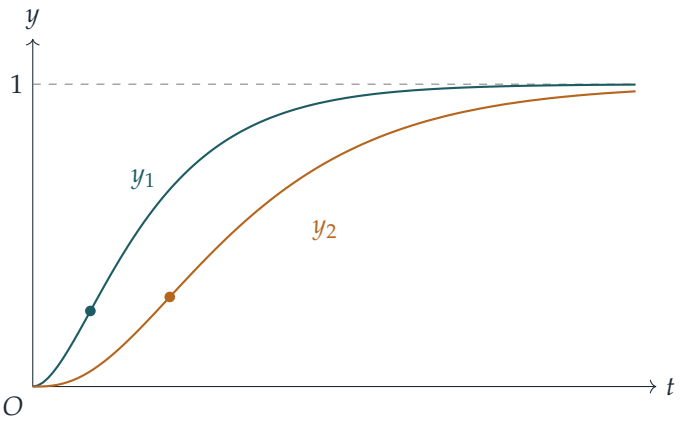
$$3u^2 + 4u^3 + 2u^4 > 0 \qquad (0 < u < 1),$$

であり、分母は正なので $y_1/y_2 > 1$ である。よって

$$y_1(t) > y_2(t) \quad \text{任意の} t > 0 :$$

すなわち、2 つの曲線は原点でのみ交わり、それ以外のすべての点で y_1 は y_2 より上にある。

これは両端での振る舞いとも一致する。$t = 0$ の近くでは $y_1 \approx \frac{t^2}{4}$ であるのに対し $y_2 \approx \frac{t^3}{27}$ であり、こちらのほうがはるかに小さい。t が大きいときは $1 - y_1 \approx 2e^{-t/2}$、$1 - y_2 \approx 3e^{-t/3}$ であり、$e^{-t/3}$ のほうが減衰が遅いので、y_2 のほうが漸近線から大きく下にある。



点は変曲点を表しており、y_1 上の $(2\ln 2, \frac{1}{4})$ と y_2 上の $(3\ln 3, \frac{8}{27})$ である。

検算

- 代入して確かめる：$\alpha = \beta = 1$ の y_1 について、$w = e^{-t/2}$ とすると $y_1^{1/2} - y_1 = (1-w) - (1-w)^2 = w(1-w)$ であり、これはちょうど y_1' に等しい。
- t が大きいとき：$y_1 \to \alpha^2/\beta^2$ であり、これは $\alpha y^{1/2} = \beta y$ となる o でない点である。同様に $y_2 \to \alpha^3/\beta^3$ であり、ここで $\alpha y^{2/3} = \beta y$ となる。
- $\alpha = \beta = 1$ での数値：$t = 2$ では $y_1 \approx 0.400$、$y_2 \approx 0.115$ であり、$t = 10$ では $y_1 \approx 0.987$、$y_2 \approx 0.897$ である。両方の式は、コンピュータによる微分方程式の逐次数値積分でも確認した。

よくある間違い

- $y \equiv 0$ も解であることに触れずに v（または v^2）で割ってしまうこと。だからこそ問題文は、原点を通る**定数でない**解を求めているのである。
- 指数を間違えること：置換 $y = v^3$ からは $e^{-\beta t/2}$ ではなく $e^{-\beta t/3}$ が得られる。
- 傾きだけから曲線の上下関係を論じること。2 つの曲線が同じ高さ $y \in (0,1)$ にあるところでは $y^{2/3} > y^{1/2}$ なので、そこでは y_2 のほうが速く増加することになる。しかしこれはどちらの曲線が上にあるかを示すものではないので、直接の比較が必要である。

STEP のその先へ

これらはベルヌーイ（Bernoulli）型方程式であり、大学 1 年で学ぶ標準的な方程式の族で、$v = y^{1-n}$ によって解かれる。これらは解の非一意性（non-uniqueness）の例にもなっている。$y^{1/2}$ と $y^{2/3}$ は $y = 0$ で傾きが無限大になるので、右辺はそこでリプシッツ連続（Lipschitz continuous）ではなく、$y \equiv 0$ と y_1 がともに原点を通る。実際、任意の時刻 t_0 まで 0 にとどまり、その後 $y_1(t - t_0)$ に従うことで、解の族全体が得られる。ピカール＝リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）は、このようなことが起こりえないのはどのような場合かを正確に説明する。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、ベルヌーイ型方程式と解の存在・一意性の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。