解答例

STEP II 2018、第 7 問

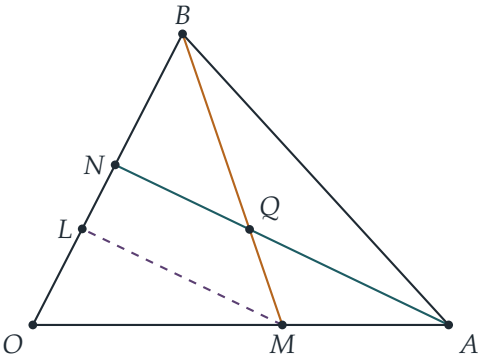
純粋数学 • 幾何におけるベクトル

> **STEP II 2018、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q7

鍵となる考え方

M は OA 上に、N は OB 上にあるので、$\mathbf{m}$ は $\mathbf{a}$ の実数倍、$\mathbf{n}$ は $\mathbf{b}$ の実数倍として書ける。点 Q には二通りの道筋でたどり着ける。一つは BM に沿う道筋、もう一つは AN に沿う道筋であり、どちらからも $\mathbf{q}$ が $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の一次結合（linear combination）として得られる。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行（parallel）でないから係数を比較（comparing coefficients）してよく、それですべてが求まる。

解答



$\mathbf{m}$ を求める

$\mathbf{m} = m\,\mathbf{a}$、$\mathbf{n} = n\,\mathbf{b}$ とおく。M と N は辺上にあるので $0 < m < 1$ かつ $0 < n < 1$ である。

BM に沿って。Q は M と B の間にあって $MQ : QB = \mu : 1$ であるから、Q は M から B へ向かって全体の $\frac{\mu}{1+\mu}$ だけ進んだ点である：

$$\mathbf{q} = \mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}(\mathbf{b} - \mathbf{m}) = \frac{1}{1+\mu}\,\mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b} = \frac{m}{1+\mu}\,\mathbf{a} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

AN に沿って。同様に $NQ : QA = \nu : 1$ であるから、

$$\mathbf{q} = \mathbf{n} + \frac{\nu}{1+\nu}(\mathbf{a} - \mathbf{n}) = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+\nu}\,\mathbf{n} = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{n}{1+\nu}\,\mathbf{b}.$$

考えてみよう **a** の係数どうし、また **b** の係数どうしをそれぞれ等しいとおいてよいのはなぜか。

O、A、B は本当の三角形の頂点であるから、**a** と **b** は零ベクトルでなく、互いに平行でもない。もし $\beta \neq 0$ として $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ が成り立つなら、**b** は **a** の実数倍になってしまう。よって $\beta = 0$ であり、すると $\alpha = 0$ となる。したがって、平面上の各ベクトルを **a** と **b** の一次結合として表す方法はただ一通りである。

q の二つの表示の差をとり、係数を比較すると

$$\frac{m}{1+\mu} = \frac{\nu}{1+\nu}, \qquad \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{n}{1+\nu}.$$

一つ目の式から $m = \dfrac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}$、すなわち

$$\mathbf{m} = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a},$$

となり、示すべき式が得られた。二つ目の式からは、役割を入れ替えた同じ議論により

$$\mathbf{n} = \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

が得られる。

λ を求める

ここで $\mathbf{l} = \lambda\mathbf{b}$ であるから、

$$\overrightarrow{ML} = \lambda\mathbf{b} - m\,\mathbf{a}, \qquad \overrightarrow{AN} = n\,\mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

これらが平行であるのは、あるスカラー（scalar）k に対して $\overrightarrow{ML} = k\,\overrightarrow{AN}$ となるとき、かつそのときに限る。**a** の係数を比較すると（先ほどと同じ理由で許される）$k = m$ となり、次に **b** の係数から $\lambda = kn = mn$ を得る。（幾何的に見れば、$ML \parallel AN$ より三角形 OML と OAN は相似（similar）であり、$OL/ON = OM/OA$ となる。）したがって

$$\lambda = mn = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu} \cdot \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu} = \mu\nu.$$

条件 $\mu\nu < 1$

$$m < 1 \iff (1+\mu)\nu < 1+\nu \iff \mu\nu < 1,$$
$$n < 1 \iff \mu(1+\nu) < 1+\mu \iff \mu\nu < 1,$$

ここで分母を払うのに $1+\nu > 0$ と $1+\mu > 0$ を用いた。よって、μ と ν が正のとき、条件 $\mu\nu < 1$ は、M が O と A の間に（端点を除いて）あり、かつ N が O と B の間に（端点を除いて）あるためのちょうど必要十分条件である。言い換えれば、直線 AN と BM（Q がそれらをこの比に分けるもの）が三角形の内部で交わるということである。この条件はまた $\lambda < 1$ も意味する。すなわち、M を通り AN に平行な直線は OB と O と B の間で交わるが、M が辺 OA 上にある以上、これは当然そうならなければならない。$\mu\nu = 1$ ならば $M = A$ かつ $N = B$ となり、図形はつぶれてしまう。$\mu\nu > 1$ ならば、M と N は辺を延長した直線上で A と B の先にある。

検算

- **中線**（*median*）。M と N が中点ならば Q は重心（centroid）であり、重心は各中線を頂点の側から $2:1$ に分ける。よって $\mu = \nu = \frac{1}{2}$ であり、公式から $m = \frac{(3/2)(1/2)}{3/2} = \frac{1}{2}$ となって、確かにそうなるべき値が得られる。このとき $\lambda = \frac{1}{4}$ である。実際、三角形 OAN における中点連結定理（midpoint theorem）により L は ON の中点であり、OB の四分の一の位置にある。
- **対称性。** $A \leftrightarrow B$ と入れ替えると $M \leftrightarrow N$、$\mu \leftrightarrow \nu$ と入れ替わり、m と n の公式も正しく入れ替わる。答え $\lambda = \mu\nu$ も対称である。
- 約 10^5 個のランダムな三角形について、辺上にランダムに M と N をとって μ と ν を測定し、m、n および $\lambda = \mu\nu$ が誤差 10^{-12} 以内で成り立つことをコンピュータで確認した。たとえば $m = 0.6$、$n = 0.55$（図の場合）のとき $\lambda = 0.33$ となる。

よくある間違い

- 分点の比（section ratio）を逆にしてしまうこと。Q は M から B へ向かって $\frac{\mu}{1+\mu}$ だけ進んだ点であり、B から M へ向かってではない。
- 理由を述べずに係数を等しいとおくこと。これは **a** と **b** が平行でないことに依存している。
- 三角形が鋭角三角形（acute-angled triangle）であることが何らかの役割を果たすと考えること。実際には何の役割もない。この議論はどんな三角形に対しても成り立つ。

STEP のその先へ

係数比較がうまくいくのは、**a** と **b** が**線形独立**（linearly independent）であり、したがって平面の基底（basis）をなすからである。これは大学で最初に学ぶ線形代数（linear algebra）の中心的な考え方である。$\lambda = \mu\nu$ というきれいな答えは、チェバ（Ceva）の定理やメネラウス（Menelaus）の定理と同じ系統に属する比の結果であり、これらは重心座標（barycentric coordinates）を用いると最もすっきり扱える。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、基底と座標を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。