解答例

STEP II 2018、第 6 問

純粋数学 ・ 階乗と素数

> **STEP II 2018、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q6

鍵となる考え方

どちらの小問も、ひとつの事実にかかっている。それは、素数（prime）p が $k!$ を割り切るのは $p \leq k$ のとき、かつそのときに限る、ということである。(i) では、$n \geq 5$ となれば階乗（factorial）は 5 の倍数であり、したがって $n! + 5$ も 5 の倍数である。(ii) では、左辺は $2n - 1$ 以下の数だけからつくられているので、$2n - 1$ より大きい素数で割り切れることはない。$m!$ がそのような素数を含むほど大きければ、等式は成り立たない。二つの定理は、m を大きくし、その素数を供給するために与えられているのである。

解答

小問 (i)

$n \geq 5$ のとき、5 は $n!$ の因数の一つであるから $5 \mid n!$ であり、したがって $5 \mid n! + 5$ である。ところが $n! + 5 > 5$ であるから、$n! + 5$ は 1 より大きく自分自身より小さい約数 5 をもち、素数ではない。よって $n \leq 4$ だけを調べればよい：

$$1! + 5 = 6, \qquad 2! + 5 = 7, \qquad 3! + 5 = 11, \qquad 4! + 5 = 29.$$

6 は素数ではなく、残りの三つは素数である。解は

$$(n, p) = (2, 7),\ (3, 11),\ (4, 29).$$

である。

小問 (ii)

$P_n = 1! \times 3! \times \cdots \times (2n-1)!$ とおく。これらの階乗のどれをとっても、その因数はすべて 1 以上 $2n-1$ 以下の整数である。そこで、素数 q が P_n を割り切るならば、q は素数であるからそれらの整数のどれかを割り切り、よって $q \leq 2n-1$ となる。これにより鍵となる事実が得られる：

$$\text{どの素数} q > 2n-1 \text{ も割り切らない：} P_n. \qquad (*)$$

一方、$q \leq m$ を満たす素数 q はすべて $m!$ を割り切る。したがって $P_n = m!$ ならば、m は $2n-1$ より大きいどの素数よりも小さい。

n が大きい場合。 $n \geq 7$ かつ $P_n = m!$ と仮定する。定理 1 より $m! = P_n > (4n)!$ であるから、$m > 4n$ である（階乗は増加するから）。定理 2 より、$2n < q < 4n$ を満たす素数 q が存在する。すると $q < 4n < m$ であるから $q \mid m! = P_n$ となる。ところが $q > 2n > 2n-1$ であるから、これは $(*)$ に矛盾（contradiction）する。よって $n \geq 7$ の解は存在しない。

> **考えてみよう** なぜすべての n について単に定理を引用するだけで済ませられないのだろうか。

定理 1 は $n \geq 7$ に対してしか主張されておらず、実際 $n = 6$ では成り立たない。そのため $n = 1, \ldots, 6$ は手で調べる必要がある。計算を短くするために、ここでも $(*)$ を用いる。

n が小さい場合。

- $n = 1$：$P_1 = 1 = 1!$ であるから $m = 1$ である。
- $n = 2$：$P_2 = 1 \times 6 = 6 = 3!$ であるから $m = 3$ である。
- $n = 3$：$P_3 = 6 \times 120 = 720 = 6!$ であるから $m = 6$ である。
- $n = 4$：$P_4 = 720 \times 5040$ である。$720 = 6!$ かつ $5040 = 7 \times 8 \times 9 \times 10$ であるから、$P_4 = 6! \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 10!$ となり、$m = 10$ である。
- $n = 5$：$P_5 = P_4 \times 9! = 10! \times 9! > 10!$ であるから $m \geq 11$ である。すると素数 11 は $m!$ を割り切るが、$11 > 9 = 2n-1$ であり、$(*)$ に矛盾する。解はない。
- $n = 6$：$P_6 = 10! \times 9! \times 11! > 12!$（$10! \times 9! > 12$ であるから）であるから $m \geq 13$ である。すると素数 13 は $m!$ を割り切るが、$13 > 11 = 2n-1$ であり、$(*)$ に矛盾する。解はない。

解が存在する各場合において m は一意である。正の整数の階乗は 2! 以降で狭義単調増加であるからである（また $1! = 1 < 2!$ である）。よって解は

$$(n, m) = (1, 1),\ (2, 3),\ (3, 6),\ (4, 10).$$

である。

検算

恒等式 $1!\,3!\,5!\,7! = 10!$ は容易に確かめられる。両辺とも 3 628 800 に等しい。$n \leq 59$ かつ $m < 400$ の範囲でコンピュータによる探索を行ったところ、ちょうど上の四つの組が見つかり、また $n! + 5$ が素数となるのは $n = 2, 3, 4$ のときに限ることも確認された（$n \leq 30$ の範囲で探索）。さらに、定理 1 が $n = 6$ で成り立たないことも確認された。これこそ、$n = 5$ と $n = 6$ を手で調べることが本当に必要な理由である。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $n = 1$ を忘れること。このとき積はただ一つの因数 1! からなるので、$(1, 1)$ は解である。
- $n = 5$ や $n = 6$ に定理 1 を用いること。定理 1 は $n \geq 7$ に対してしか述べられていないので、これらの場合には独自の議論が必要である。
- $q \leq m$ を確かめずに「$q \mid m!$」と述べること。まさにそのために、定理 1 から $m > 4n$ を得る必要があるのである。

STEP のその先へ

定理 2 はベルトランの仮説（Bertrand's postulate）である：すべての $n \geq 1$ に対して、$n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在する。チェビシェフ（Chebyshev）が 1852 年にこれを証明し、のちにエルデシュ（Erdős）が中心二項係数（central binomial coefficient）$\binom{2n}{n}$ を用いた美しい初等的証明を与えた。$n! + 1 = m^2$ のような方程式（ブロカールの問題（Brocard's problem））は、いまなお未解決である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、素数と階乗の算術へ進む次の一歩としてよい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。