解答例

# STEP II 2018、第 5 問

純粋数学 ・ 級数の積分

> **STEP II 2018、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q5

## 鍵となる考え方

どの小問でも、関数をべき級数（power series）に展開し、1 項ずつ積分する。(i) では、等比級数（geometric series）を積分するだけである。(ii) では、指数関数を展開すると各項が $\int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ という形の積分になる。これは階乗（factorial）であり、階乗どうしが約分されて (i) の級数がそのまま残る。(iii) では、分母の $\ln x$ が手がかりになる。$x = \mathrm{e}^{-t}$ と置換（substitution）すると、$\ln x$ は $-t$ になり、積分は (ii) の積分 2 つに帰着する。

## 解答

### 小問 (i)

$|x| < 1$ のとき、二項展開（binomial expansion）（公比 $-x$ の等比級数）により

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

両辺を 0 から $x$ まで積分する。左辺は $\ln 1 = 0$ であるから $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(1+x)$ となる。右辺は項別に積分して

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (\text{置換：} n+1 \to n) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}, \end{aligned}$$

となり、これが $|x| < 1$ に対して求める結果である。

**小問 (ii)**

すべての $x$ に対して

$$\mathrm{e}^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ax)^n}{n!} = 1 - ax + \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots .$$

$n = 0$ の項は 1 であるから

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-ax}}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n x^{n-1}}{n!}.$$

ここで $x$ で割っても問題はない。残った各項はどれも因数 $x$ をもつので、被積分関数（integrand）は $x = 0$ でもまったく問題なく振る舞う（$a$ に近づく）。$\mathrm{e}^{-x}$ を掛けて項別に積分すると（収束（convergence）は気にしなくてよいと問題文にある）、

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} I_{n-1}, \qquad \text{ただし} I_m = \int_0^{\infty} x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

**考えてみよう** $I_m$ はいくつか。

$u = x^m$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行う。$m \geq 1$ のとき

$$I_m = \Big[ -x^m \mathrm{e}^{-x} \Big]_0^{\infty} + m \int_0^{\infty} x^{m-1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m I_{m-1},$$

である。$x \to \infty$ のとき $x^m \mathrm{e}^{-x} \to 0$ であり（指数関数が勝つ）、$x = 0$ では 0 だからである。$I_0 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ であるから、$I_m = m!$ が従う。

よって $I_{n-1} = (n-1)!$ であり、$\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ である。したがって

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n} = \ln(1 + a),$$

となる。ここで小問 (i) を $x = a$ として用いた。$|a| < 1$ であるから、これは許される。以上で求める結果が得られた。

**小問 (iii)**

$x = \mathrm{e}^{-t}$ と置換すると、$\ln x = -t$、$\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ である。$x$ が 0 から 1 まで動くとき、$t$ は $\infty$ から 0 まで減少する。また $x^p = \mathrm{e}^{-pt}$、$x^q = \mathrm{e}^{-qt}$ である。よって

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^{-pt} - \mathrm{e}^{-qt}}{-t} \left(-\mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt}\right) \mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t,$$

となる。ここで 2 つの負号は打ち消し合い、積分の上端と下端を入れ替えたことで $p$ と $q$ が入れ替わった。次に $\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt} = \left(1 - \mathrm{e}^{-pt}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-qt}\right)$ と書いて積分を分け

る。それぞれが (ii) の形であり、$a = p$ および $a = q$ に対応し、いずれも $|a| < 1$ を満たす。したがって

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+p) - \ln(1+q) = \ln\left(\frac{1+p}{1+q}\right).$$

積分を分けてよいのは、2 つの積分がそれぞれ単独で収束するからである。実際、(ii) によりどちらも有限の値をもつ。

## 検算

- $p = q$ ならば被積分関数は 0 であり、実際 $\ln\frac{1+p}{1+p} = 0$ である。
- $p$ と $q$ を入れ替えると、被積分関数と答えの両方の符号が変わる。
- 符号の確認：$0 < x < 1$ では $\ln x < 0$ である。$p < q$ ならば $x^p > x^q$ であるから被積分関数は負であり、$\ln\frac{1+p}{1+q}$ も負である。
- $p = \frac{1}{2}$、$q = 0$ のとき、答えは $\ln\frac{3}{2} \approx 0.405465$ である。$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ を数値積分すると同じ値が得られ、$(-1, 1)$ から $p$ と $q$ を無作為に選んでも、小数第 6 位まで公式と一致する。

## よくある間違い

- $\mathrm{e}^{-ax}$ の $n = 0$ の項が 1 と打ち消し合うことを忘れ、0 で発散する $\mathrm{e}^{-x}/x$ を積分しようとしてしまう。
- (iii) の置換で符号を 1 つ落とす。追うべき負号は 3 つあり（$\ln x$ から、$\mathrm{d}x$ から、そして積分の上端と下端の入れ替えから）、1 つでも誤ると $\ln\frac{1+q}{1+p}$ になってしまう。
- $(n-1)!$ ではなく $I_{n-1} = n!$ と書いてしまう。そうすると階乗が約分されて $\frac{1}{n}$ にならない。

## STEP のその先へ

積分 $I_m = \int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m!$ はガンマ関数（gamma function）$\Gamma(m+1)$ であり、階乗を整数以外へ拡張するものである。(iii) の積分は「積分記号下の微分」（differentiating under the integral sign）の古典的な例である。$p$ について微分すると厄介な $\ln x$ が消え、$\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$ が残る。実はこの結果は $p, q > -1$ であれば常に成り立つ。和と積分の順序交換は、今回は気にしなくてよいとされていたが、解析学（analysis）の講義では一様収束（uniform convergence）や優収束（dominated convergence）によって

正当化される。これらの手順の背後にある解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。