解答例

STEP II 2018、第 4 問

純粋数学 ・ 三角方程式

> **STEP II 2018、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q4

鍵となる考え方

与えられた恒等式（identity）は余弦の和を積（product）に変える。そして、ある式が 0 に等しいという方程式を解くときに欲しいのは、まさに積の形である。(i) では、外側の 2 項どうしと内側の 2 項どうしを組にすると、すぐに共通因数（common factor）が現れる。(ii) と (iii) では、すべてを角の半和（half-sum）と半差（half-difference）で表すのが有効な手であり、そうすると (ii) は因数分解でき、(iii) は 2 つの平方の和が 0 に等しいという式になる。

解答

小問 (i)

最初の項と最後の項、そして中央の 2 項をそれぞれ組にする。恒等式により、

$$\cos x + \cos 4x = 2\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{3x}{2},$$
$$3(\cos 2x + \cos 3x) = 6\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{x}{2}.$$

（余弦は偶関数（even function）なので、$\cos(-\frac{3x}{2}) = \cos\frac{3x}{2}$ と書いてよい。）したがって左辺は

$$2\cos\tfrac{5x}{2}\left(\cos\tfrac{3x}{2} + 3\cos\tfrac{x}{2}\right).$$

となる。$c = \cos\frac{x}{2}$ とおくと、3 倍角の公式（triple-angle formula）$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より $\cos\frac{3x}{2} = 4c^3 - 3c$ であるから、括弧の中はちょうど $4c^3$ となる。よって方程式は

$$8\cos\tfrac{5x}{2}\cos^3\tfrac{x}{2} = 0.$$

となる。

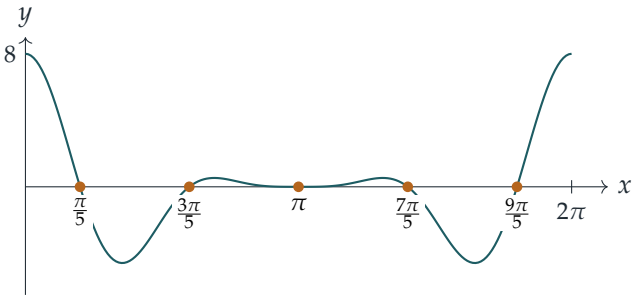
第 1 の因数。 $\cos\frac{5x}{2}=0$ は、整数 k を用いて $\frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$、すなわち $x=\frac{(2k+1)\pi}{5}$ と表されることを意味する。$0\le x\le 2\pi$ となるには $0\le 2k+1\le 10$ が必要なので、$k=0,1,2,3,4$ である。

第 2 の因数。 $0\le\frac{x}{2}\le\pi$ の範囲で $\cos\frac{x}{2}=0$ となるのは $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$、すなわち $x=\pi$ のみであり、これはすでに上の一覧に含まれている。

したがって解は

$$x=\frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \pi,\ \frac{7\pi}{5},\ \frac{9\pi}{5}.$$

である。左辺のグラフにこれらの解が現れている。$x=\pi$ では $\cos\frac{5x}{2}$ と $\cos^3\frac{x}{2}$ がともに 0 になるので、曲線はそこで軸と交差せず、接するだけである。



小問 (ii)

最初の 2 項に恒等式を用い、さらに $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ を用いると、

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)-\cos 2x=2\cos x\cos y-2\cos^2 x+1.$$

となる。これを 1 に等しいとおくと

$$2\cos x\,(\cos y-\cos x)=0,$$

となるので、$\cos x=0$ または $\cos y=\cos x$ である。

- $0\le x\le\pi$ で $\cos x=0$ ならば、$x=\frac{\pi}{2}$ である（このとき y は任意でよい）。
- $\cos y=\cos x$ ならば、$x=y$ である。余弦は $[0,\pi]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）であり、その区間では各値をただ一度しかとらないからである。

よって、求めるとおり $x=y$ または $x=\frac{\pi}{2}$ である。

小問 (iii)

$s=\frac{1}{2}(x+y)$、$d=\frac{1}{2}(x-y)$ とおく。恒等式より $\cos x+\cos y=2\cos s\cos d$ であり、また $\cos(x+y)=\cos 2s=2\cos^2 s-1$ である。方程式は

$$2\cos s\cos d-2\cos^2 s+1=\tfrac{3}{2}\iff 4\cos^2 s-4\cos s\cos d+1=0.$$

となる。

> **考えてみよう** 方程式は 1 つ、未知数は 2 つである。それなのに、どうして x と y の両方が決まりうるのだろうか？

$\cos s$ について平方完成（completing the square）する。$1=\cos^2 d+\sin^2 d$ であるから、

$$4\cos^2 s-4\cos s\cos d+\cos^2 d+\sin^2 d=(2\cos s-\cos d)^2+\sin^2 d=0.$$

2 つの実数の平方の和が 0 になるのは両方が 0 のときに限るので、次の 2 つの方程式が得られる。

$$\sin d=0\qquad\text{かつ}\qquad 2\cos s=\cos d.$$

$x,y\in[0,\pi]$ より $-\frac{\pi}{2}\le d\le\frac{\pi}{2}$ であり、この範囲で sin の零点は $d=0$ のみである。よって $x=y$ であり、このとき $s=x$、$\cos d=1$ となるので $\cos x=\frac{1}{2}$ を得る。$0\le x\le\pi$ より、これは $x=\frac{\pi}{3}$ を意味する。

したがって、解はただ 1 つ

$$x=y=\frac{\pi}{3}.$$

である。実際、$\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ である。

同じ計算からさらに多くのことがわかる。すべての x,y に対して

$$\tfrac{3}{2}-\big(\cos x+\cos y-\cos(x+y)\big)=\tfrac{1}{2}\big[(2\cos s-\cos d)^2+\sin^2 d\big]\ge 0,$$

が成り立つので、$\frac{3}{2}$ は左辺がとりうる最大値であり、この方程式はまさにその最大値がどこでとられるかを問うているのである。

検算

- (i) で $x=\frac{\pi}{5}$ のとき、$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ より $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0$ かつ $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=0$ である。$x=0$ のとき左辺は $1+3+3+1=8$ であり、$8\cos 0\cos^3 0$ と一致する。
- $[0,2\pi]$ 上の細かい格子でコンピュータ探索を行うと、上の 5 つの零点がちょうど見つかった。また $[0,\pi]^2$ 上の格子では、$\cos x+\cos y-\cos(x+y)$ の最大値は 1.5 であり、それをとるのは $x=y\approx 1.0472=\frac{\pi}{3}$ のみであった。

- (ii) で $x = \frac{\pi}{2}$ とすると、すべての y に対して $\cos(\frac{\pi}{2} + y) + \cos(\frac{\pi}{2} - y) - \cos\pi = -\sin y + \sin y + 1 = 1$ となる。

よくある間違い

- $x = \pi$ を 2 回数える、あるいは見落とす。これは (i) の両方の因数から出てくるが、解としては 1 つである。
- (ii) で $\cos x$ で割ってしまい、$x = \frac{\pi}{2}$ を失う。
- (iii) で $\cos s$ の 2 次方程式のところで止まってしまい、判別式（discriminant）（あるいは平方の和）を使って $\cos^2 d = 1$ を導かない。

STEP のその先へ

(i) の係数 1, 3, 3, 1 は偶然ではない。左辺は $e^{ix}(1 + e^{ix})^3$ の実部（real part）であり、$1 + e^{ix} = 2\cos\frac{x}{2}\, e^{ix/2}$ であるから、これは 1 行で $8\cos^3\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$ となる。小問 (iii) は、三角形の内角に関する古典的な不等式 $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ が姿を変えたものであり（$A = x$、$B = y$、$C = \pi - x - y$ とおけばよい）、等号が成り立つのは正三角形（equilateral triangle）のときに限る。このような 2 変数関数の最大化は、多変数の微分積分学（multivariable calculus）において大学 1 年次に学ぶ標準的な題材である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素指数関数（complex exponential）を用いると、このような三角関数の恒等式がほとんど自動的に得られることを示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。