解答例

STEP II 2018、第 3 問

純粋数学 • 回転対称性と積分

> **STEP II 2018、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q3

鍵となる考え方

点 (a,b) のまわりの半回転（half-turn）は (x,y) を $(2a-x,\,2b-y)$ に移す。したがって、この対称性をもつ曲線では、各 x の値がその鏡像 $2a-x$ と組になり、二つの高さの和は $2b$ となる。正接関数に対して自然な組み合わせは $x \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - x$ である。なぜなら $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = 1/\tan x$ だからである。この一つの恒等式から曲線の対称性が得られ、さらに中心に関して対称な区間上の積分は、実際に積分計算をすることなく求められる。

解答

小問 (i)

$f(x) = (1+\tan x)^{-1}$ とおき、連鎖律（chain rule）を用いると、

$$f'(x) = -\frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{\cos^2 x\,(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$
$$= -\frac{1}{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x} = -\frac{1}{1+\sin 2x},$$

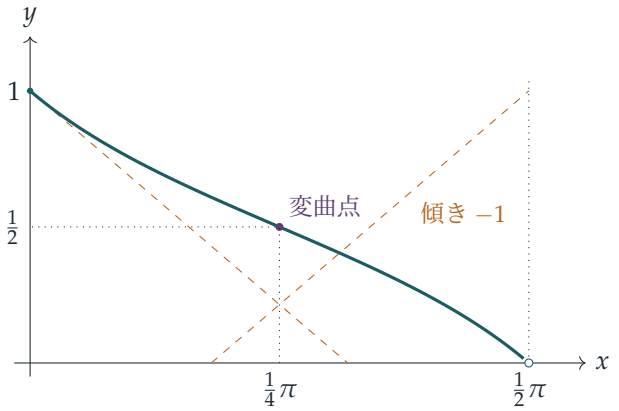
となり、示すべき式が得られる。（$1+\tan x$ に $\cos x$ を掛けることが、全体をすっきりさせる一歩である。）

値域（range）について。$0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ より $0 \le 2x < \pi$ であるから、$\sin 2x$ は $[0,1]$ のすべての値をとる。$x = 0$ で値 0 を、$x = \frac{1}{4}\pi$ で値 1 をとる。よって $1 \le 1+\sin 2x \le 2$ であり、逆数をとり（すべて正なので不等号の向きが逆になる）、さらに符号を反転させると、

$$-1 \le f'(x) \le -\tfrac{1}{2}.$$

両端の値はともに実際にとられる。$f'(0) = -1$、$f'(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$ である。

グラフの概形について。$f(0) = 1$、$f(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$ であり、$x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $\tan x \to \infty$ であるから $f(x) \to 0$ となる。曲線はつねに減少し、傾きは -1 と $-\frac{1}{2}$ の間にある。傾きが最も急なのは $x = 0$（傾き -1）、最も緩やかなのは $x = \frac{1}{4}\pi$ であり、$x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき再び急になって傾き -1 に近づく。したがって f' は $\frac{1}{4}\pi$ で最大となり、そこは変曲点（point of inflection）である。曲線は $[0, \frac{1}{4}\pi)$ で下に凸（concave up）、$(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ で上に凸（concave down）である。（実際 $f''(x) = 2\cos 2x/(1+\sin 2x)^2$ であり、これは $\frac{1}{4}\pi$ で符号を変える。）



破線はいずれも傾き -1 である。一方は $(0, 1)$ における接線であり、もう一方は $x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき曲線が近づいていく方向である。曲線は $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ のまわりの半回転について対称に見える。この問題の残りの部分は、まさにこのことを扱っている。

小問 (ii)

(a, b) のまわりの角 π の回転は (x, y) を $(2a - x, 2b - y)$ に移す。(a, b) が点とその像の中点となるからである。曲線が (a, b) のまわりに位数 2 の回転対称性（rotational symmetry）をもつとは、この回転が曲線をそれ自身の上に移すことにほかならない。（そのためには定義域が $x = a$ に関して対称で、x が定義域に属するときはつねに $2a - x$ も定義域に属していなければならない。）

$(\Rightarrow)$ 曲線がこの対称性をもつと仮定する。定義域内の任意の x に対し、$(x, g(x))$ は曲線上にあるから、その像 $(2a - x, 2b - g(x))$ も曲線上にある。曲線は関数のグラフであるから、x 座標が $2a - x$ である曲線上の点は $(2a - x, g(2a - x))$ ただ一つである。よって $g(2a - x) = 2b - g(x)$、すなわち

$$g(x) + g(2a - x) = 2b.$$

$(\Leftarrow)$ 定義域内のすべての x に対して $g(x) + g(2a - x) = 2b$ が成り立つと仮定する。曲

線上の一般の点 $(x, g(x))$ の像は

$$(2a - x,\, 2b - g(x)) = (2a - x,\, g(2a - x)),$$

であり、これは曲線上にある。よってこの回転は曲線を曲線の中に移す。さらに回転を 2 回行うと恒等変換になるから、曲線をそれ自身の上に移す。恒等式に $x = a$ を代入すると $g(a) = b$ となり、(a, b) が曲線上にあることと整合する。

積分について。原点に関する対称性とは $a = b = 0$ のことであるから、$g(-x) = -g(x)$、すなわち g は奇関数（odd function）である。左半分で $x = -u$ と置換（substitution）すると、

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} g(-u)\,\mathrm{d}u = -\int_{0}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

となるので、二つの半分は打ち消し合い、

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

小問 (iii)

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ に対して $h(x) = \dfrac{1}{1 + \tan^k x}$ とおく。(i) のグラフを手がかりに、$a = \frac{1}{4}\pi$、$b = \frac{1}{2}$ を試す。定義域 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ は $\frac{1}{4}\pi$ に関して対称であり、$2a - x = \frac{1}{2}\pi - x$ である。

考えてみよう $h(\frac{1}{2}\pi - x)$ はどのように簡単にできるか。

$\tan x > 0$ となる $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ で成り立つ $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = \cot x = 1/\tan x$ を用いる。分母と分子に $\tan^k x$ を掛けると、

$$h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1}{1 + \tan^{-k} x} = \frac{\tan^k x}{\tan^k x + 1},$$

したがって

$$h(x) + h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1 + \tan^k x}{1 + \tan^k x} = 1 = 2 \cdot \tfrac{1}{2}.$$

$\tan \frac{1}{4}\pi = 1$ より $h(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$ であるから、点 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ は曲線上にある。(ii) により、正の定数 k が何であっても、曲線は $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ のまわりに位数 2 の回転対称性をもつ。

積分について、$I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} h(x)\,\mathrm{d}x$ とおく。区間 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ は $\frac{1}{4}\pi$ に関して対称であるから、置換 $x = \frac{1}{2}\pi - u$ はこの区間をそれ自身に移す（両端が入れ替わり、それによって $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ から生じる負号が吸収される）：

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} h(\tfrac{1}{2}\pi - u)\,\mathrm{d}u = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \big(1 - h(u)\big)\,\mathrm{d}u \\ &= \left(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\right) - I. \end{aligned}$$

よって $2I = \frac{1}{6}\pi$ であり、

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\tan^k x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12}.$$

幾何学的には、長方形 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi] \times [0,1]$ の内部で、半回転が曲線の下側の領域と上側の領域を入れ替えるので、面積は長方形の半分 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\pi$ となる。これは (ii) の議論において g を $h - \frac{1}{2}$ に置き換えたものである。

検算

- $k = 1$、$x = \frac{1}{6}\pi$ のとき $h = 1/(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) \approx 0.634$、$x = \frac{1}{3}\pi$ のとき $h = 1/(1+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 0.366$ である。これらの和は対称性のとおり 1 となる。
- 答えは k によらない。$k \to \infty$ のとき、h は $x < \frac{1}{4}\pi$ では 1 に近く、$x > \frac{1}{4}\pi$ では 0 に近いので、積分は $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ の長さ $\frac{1}{12}\pi$ に近づき、結果と一致する。
- $k = 0.3$、1、2、3.7、10 について数値積分を行うと、いずれも 0.2617994 となり、$\pi/12 \approx 0.2617994$ と一致した。

よくある間違い

- (i) で値域を $-1 < f'(x) \le -\frac{1}{2}$ と書いてしまう。値 -1 は定義域に含まれる $x = 0$ でとられる。
- (ii) で一方向しか証明しない。「必要十分（if and only if）」を示すには、対称性 $\Rightarrow$ 恒等式と、恒等式 $\Rightarrow$ 対称性の両方が必要である。
- (iii) で $1/(1+\tan^k x)$ を直接積分しようとする。一般の k に対しては見つけられる初等的な原始関数（antiderivative）は存在せず、対称性こそがこの問題の要点である。

STEP のその先へ

(iii) の技法、すなわち置換 $x \mapsto a + b - x$ を行ったあとで積分をそれ自身に加えるという方法は、しばしば「キングの規則（King's rule）」と呼ばれる。これは定義域の対称性を用いて積分を簡単にするという考え方の特別な場合である。この考え方は群論（group theory）や物理学で中心的な役割を果たし、そこでは問題の対称性から、どの積分が消えるか（(ii) のように）、あるいはどの積分が簡単な値をとるかが予言される。同じ論法により、すべての $k > 0$ に対して $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^k x} = \frac{1}{4}\pi$ が求められる。Siklos の

Advanced Problems in Mathematics（STEP 対策の問題集）には、この種の対称性の議論で解ける積分がほかにも数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。