解答例

STEP II 2018、第 2 問

純粋数学 • 凹関数

> **STEP II 2018、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q2

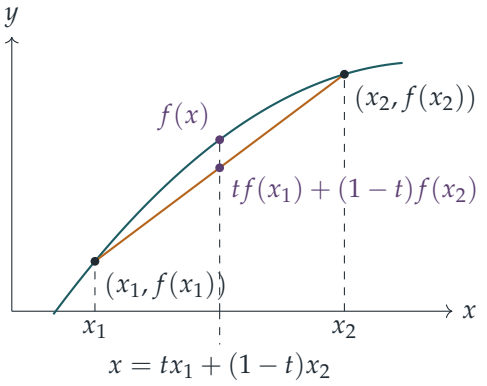
鍵となる考え方

t が 0 から 1 まで動くとき、点 $tx_1 + (1-t)x_2$ は x_2 から x_1 まで動き、$tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ はその点の真上にある弦の高さである。したがって凹性（concavity）とは、すべての弦が曲線の上または下側にある、ということを述べている。この 2 点の不等式が得られれば、それを 2 回用いることで 3 点版が得られ、$A + B + C = \pi$ のもとで適切な凹関数に適用することで、三角形に関する 2 つの不等式がともに導かれる。

解答

図示

$x = tx_1 + (1-t)x_2$ とおく。このとき点 $(x,\ tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$ は $(x_2, f(x_2))$ から $(x_1, f(x_1))$ への弦（chord）を $(1-t) : t$ の比に分ける点であり、したがって x の真上（または真下）で弦上にある。定義は、x における曲線の高さが弦の高さ以上であることを述べている。



$f'' < 0$ から凹性が従う理由

$x_1 = x_2$ のとき、または $t = 0$ あるいは $t = 1$ のときは、不等式は等号で成り立つ。そこで $0 < t < 1$ とし、一般性を失うことなく $x_1 < x_2$ とする（x_1, x_2 を入れ替えることは t と $1 - t$ を入れ替えることにすぎない）。このとき $x = tx_1 + (1 - t)x_2$ は $x_1 < x < x_2$ を満たし、

$$x - x_1 = (1 - t)(x_2 - x_1), \qquad x_2 - x = t(x_2 - x_1).$$

平均値の定理（mean value theorem）により、

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

を満たす $c_1 \in (x_1, x)$ と $c_2 \in (x, x_2)$ が存在する。(a, b) 上で $f'' < 0$ であるから、f' はそこで狭義単調減少であり、$c_1 < c_2$ であるから $f'(c_1) > f'(c_2)$ となる。上の長さを代入し、正の因数 $x_2 - x_1$ を約すと、

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1 - t} > \frac{f(x_2) - f(x)}{t}.$$

$t(1 - t) > 0$ を掛けると $tf(x) - tf(x_1) > (1 - t)f(x_2) - (1 - t)f(x)$、すなわち

$$f(x) > tf(x_1) + (1 - t)f(x_2).$$

を得る。よって f は (a, b) 上で凹である。言葉で言えば、曲線の傾きは減少し続けるので、x_1 から x への傾きは x から x_2 への傾きより大きく、曲線は弦より上に膨らむのである。

小問 (i)

考えてみよう どの 2 点を、どのような重みで平均すれば $\frac{1}{3}(u+v+w)$ になるか。

v と w をひとまとめにする。すなわち $x_1 = u$、$x_2 = \frac{1}{2}(v+w)$、$t = \frac{1}{3}$ とする。x_2 は v と w の間にあるので (a,b) に属し、

$$tx_1 + (1-t)x_2 = \tfrac{1}{3}u + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(v+w) = \tfrac{1}{3}(u+v+w).$$

となる。定義より

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}f\Big(\frac{v+w}{2}\Big).$$

次に、$x_1 = v$、$x_2 = w$、$t = \frac{1}{2}$ として再び定義を用いると、$f(\frac{1}{2}(v+w)) \geq \frac{1}{2}f(v) + \frac{1}{2}f(w)$ である。この項の係数 $\frac{2}{3}$ は正であるから、代入しても不等号の向きは変わらない。

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(f(v)+f(w)) = \frac{f(u)+f(v)+f(w)}{3},$$

これが求める結果である。

小問 (ii)

$0 < x < \pi$ 上で $f(x) = \sin x$ とする。ここで $f''(x) = -\sin x < 0$ であるから、sin は $(0,\pi)$ 上で凹である。三角形の内角は $0 < A, B, C < \pi$ かつ $A+B+C = \pi$ を満たすので、$u = A$、$v = B$、$w = C$ として小問 (i) を用いると

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

となり、したがって $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ である。

小問 (iii)

$0 < x < \pi$ では $\sin x > 0$ であるから、$g(x) = \ln(\sin x)$ はそこで定義され、

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x, \qquad g''(x) = -\operatorname{cosec}^2 x < 0.$$

である。よって g は $(0,\pi)$ 上で凹であり、小問 (i) より

$$\frac{\ln\sin A + \ln\sin B + \ln\sin C}{3} \leq \ln\sin\frac{\pi}{3} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

を得る。3 を掛けて対数をまとめると、$\ln(\sin A \sin B \sin C) \leq \ln(\frac{\sqrt{3}}{2})^3$ となる。exp は増加関数であるから、

$$\sin A \times \sin B \times \sin C \leq \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

検算

どちらの上界も正三角形で達成される。実際、$3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$、$\sin^3\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.6495$ である。直角二等辺三角形では和が $1+\sqrt{2} \approx 2.414$、積が $\frac{1}{2}$ となり、どちらも上界より小さい。200 000 個のランダムな三角形に対してコンピュータで確かめたところ、和が 2.598076 を超えるものも、積が 0.649519 を超えるものもなかった。非常に平たい三角形（$A, B \to 0$、$C \to \pi$）では、当然ながら和も積も 0 に近づく。

よくある間違い

- 小問 (i) で、$x_1 = u$、$x_2 = v$ として $t = \frac{1}{3}$ を用いると $\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v$ となり、3 つの数の平均にはならない。2 つ目の点は v と w の中点でなければならない。
- 小問 (iii) で、小問 (ii) の不等式を積に直接適用することはできない。積を和に変えるのは対数である。また、$\ln\sin x$ が定義されること、すなわち $\sin x > 0$ であることも確認すること。
- $f'' < 0$ が「曲線が下向きに曲がることを意味する」と述べるだけでは、それ自体で弦の不等式の証明にはならない。平均値の定理による議論が、それを厳密なものにするのである。

STEP のその先へ

小問 (i) はイェンセンの不等式（Jensen's inequality）の 3 点の場合である。すなわち、凹関数 f と和が 1 となる重み $t_i \geq 0$ に対して $f\left(\sum t_i x_i\right) \geq \sum t_i f(x_i)$ が成り立ち、これはここでの議論とまったく同様に数学的帰納法（induction）で証明される。$f = \ln$ とすると相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）が得られ、確率論では凹関数 f に対して $f(\mathrm{E}[X]) \geq \mathrm{E}[f(X)]$ が成り立つことを述べている。凸関数と凹関数、および第 2 段落の背後にある平均値の定理は、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）で丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。