解答例

STEP II 2018、第 13 問

確率・統計 ・ 漸化式

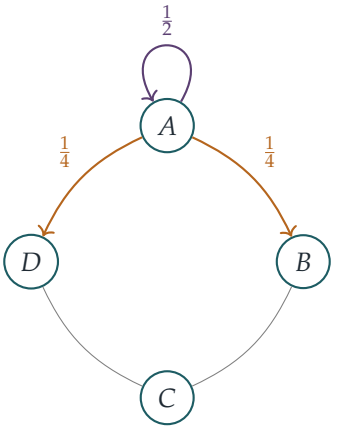
> **STEP II 2018、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q13

鍵となる考え方

小包がどこにあっても、次の笛でどう動くかは決まった規則に従う。したがって A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1} のそれぞれは A_n, B_n, C_n, D_n の決まった一次結合で表される。互いに絡み合った 4 本の漸化式（recurrence）は手ごわく見えるが、適切な**組合せ**（向かい合う子ども同士の和と差）をとると、それぞれが 1 行で書ける独自の漸化式を満たし、それらはすぐに解くことができる。

解答

円周上に並んだ子どもに名前をつける。笛が鳴るたびに、小包を持っている子は確率 $\frac{1}{2}$ でそのまま持ち続け、両隣の子それぞれに確率 $\frac{1}{4}$ で渡す。問題の設定により、時計回りに渡すことと反時計回りに渡すことは同様に確からしいことに注意する。



図は A からの動きを示している。どの子においても同じパターンが当てはまる。

小問 (i)

A から始めると、1 回目の笛の後は

$$A_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad B_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad C_1 = 0, \qquad D_1 = \tfrac{1}{4},$$

となる。C は A から 2 つ離れているので、1 回の移動では到達できないからである。

2 回目の笛の後にある子のところに小包があるためには、すでにそこにあってとどまった（確率 $\frac{1}{2}$）か、隣の子のところにあって正しい向きに渡された（それぞれの隣から確率 $\frac{1}{4}$）かのいずれかである。よって

$$\begin{aligned} A_2 &= \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{3}{8}, \\ B_2 &= \tfrac{1}{2}B_1 + \tfrac{1}{4}A_1 + \tfrac{1}{4}C_1 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + 0 = \tfrac{1}{4}, \\ C_2 &= \tfrac{1}{2}C_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = 0 + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{8}, \\ D_2 &= \tfrac{1}{2}D_1 + \tfrac{1}{4}C_1 + \tfrac{1}{4}A_1 = \tfrac{1}{8} + 0 + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

確認として、$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 1$ である。

小問 (ii)

$n = 2$ のときに用いた議論は、全確率の法則（law of total probability）により（n 回目の笛の後に誰が小包を持っているかで場合分けして）すべての $n \geq 0$ に対して成り立つ：

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \tfrac{1}{2}A_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & B_{n+1} &= \tfrac{1}{2}B_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n), \\ C_{n+1} &= \tfrac{1}{2}C_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & D_{n+1} &= \tfrac{1}{2}D_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n), \end{aligned}$$

ただし $A_0 = 1$ かつ $B_0 = C_0 = D_0 = 0$ である。

B_n と D_n を求める。 B_{n+1} と D_{n+1} の式を辺々加えると

$$B_{n+1} + D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n + D_n) + \tfrac{1}{2}(A_n + C_n) = \tfrac{1}{2}(A_n + B_n + C_n + D_n) = \tfrac{1}{2},$$

となる。常に誰かが小包を持っているので、4 つの確率の和は 1 だからである。

> **考えてみよう** 和 $B + D$ はわかったが、これを B と D にどう分ければよいだろうか？

加える代わりに引いてみる。すると $A_n + C_n$ の項が打ち消し合い、

$$B_{n+1} - D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n - D_n).$$

が残る。$B_0 - D_0 = 0$ であるから、すべての n に対して $B_n - D_n = 0$ となる。（これはゲームの鏡映対称性である。時計回りと反時計回りに渡すことは同様に確からしく、B と D は A の両側に対称に位置している。）$B_n + D_n = \frac{1}{2}$ と合わせて

$$B_n = D_n = \tfrac{1}{4} \qquad \text{ただし} n \geq 1,$$

を得る。一方、もちろん $B_0 = D_0 = 0$ である。これは小問 (i) と一致する。

A_n と C_n を求める。 $n \geq 1$ に対しては、いまや $A_n + C_n = 1 - (B_n + D_n) = \frac{1}{2}$ がわかっている。A_{n+1} と C_{n+1} の式を辺々引くと、$B_n + D_n$ の項が打ち消し合う：

$$A_{n+1} - C_{n+1} = \tfrac{1}{2}(A_n - C_n),$$

そしてこれはすべての $n \geq 0$ に対して成り立つ。$A_0 - C_0 = 1$ であるから、すべての $n \geq 0$ に対して $A_n - C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ を得る。これを $A_n + C_n = \frac{1}{2}$ と連立して解くと

$$\boxed{A_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}, \qquad C_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} \qquad (n \geq 1).}$$

これらの式は $n = 0$ では成り立たない（$A_0 = \frac{3}{4}$ を与えてしまう）。関係式 $A_n + C_n = \frac{1}{2}$ は 1 回目の笛の後からしか成り立たないからである。

検算

- $n = 1$：$A_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ かつ $C_1 = 0$。$n = 2$：$A_2 = \frac{3}{8}$ かつ $C_2 = \frac{1}{8}$。いずれも小問 (i) と一致する。
- $n = 3$：公式から $(A_3, B_3, C_3, D_3) = (\frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4})$ が得られ、その和は 1 であり、漸化式を直接 1 段ずつ計算した結果とも一致する。また、200 000 回のゲームのコンピュータシミュレーションでは $A_3 \approx 0.313$ および $C_3 \approx 0.188$ となった。
- $n \to \infty$ のとき、どの確率も $\frac{1}{4}$ に収束（converge）する。多くの笛が鳴った後には、対称性から予想されるとおり、小包はどの子のところにある確率も等しくなる。

よくある間違い

- B_{n+1} を、B へ入ってくる確率ではなく、B から渡される確率を用いて書いてしまう。「直前に小包はどこにあり得たか？」と自問するとよい。
- すべての $n \geq 0$ に対して $A_n = \frac{1}{4} + 2^{-(n+1)}$ と述べてしまう。これは $n = 0$ では誤りである。

- 理由を一言も述べずに「対称性により」$B_n = D_n$ と仮定してしまう。差についての漸化式を使えば、これを厳密に示せる。

STEP のその先へ

これは**マルコフ連鎖**（Markov chain）である。すなわち、推移行列（transition matrix）P をもつ、4 つの状態からなる閉路上のランダムウォーク（random walk）であり、$(A_n, B_n, C_n, D_n) = (1,0,0,0)P^n$ が成り立つ。組合せ $B_n - D_n$, $A_n - C_n$, $A_n + C_n - B_n - D_n$ は P の固有ベクトル（eigenvector）から得られるものであり（固有値（eigenvalue）はそれぞれ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$）、一様分布（uniform distribution）へ速さ 2^{-n} で収束することは、2 番目に大きい固有値によって支配されている。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖とその長期的な振る舞いについてわかりやすく解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。