解答例

STEP II 2018、第 12 問

確率・統計 ・ 最適停止と期待値

> **STEP II 2018、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q12

鍵となる考え方

表（Heads）の目標回数を h に固定すると、ゲームが終わる前に目標に到達したときに限り £h を得て、そうでなければ何も得られない。したがって獲得額の期待値（expected value）は h と「表が h 回出るところまで到達する確率」の積であり、問題全体はこの確率を求めることに帰着する。整数 h について最大化するときは微分してはいけない。比（ratio）E_{h+1}/E_h を調べて、隣り合う項を比較するのである。

解答

以下では、裏（Tails）が出る確率を $q = 1 - p = \frac{1}{N+1}$ とし、目標を h（ただし $h \geq 1$）としたときの獲得額の期待値を E_h とする。表が h 回出るところまで到達すれば £h、そうでなければ £0 を得るので、

$$E_h = h \times \mathrm{P}(\text{ゲームが終わる前に表が}h\text{回に達する}).$$

小問 (i)

バージョン 1 では裏が 1 回出ただけでゲームが終わるので、表が h 回に達するのは、最初の h 回の投げがすべて表であるときに限る。各回の投げは独立（independent）であるから、この確率は p^h であり、

$$E_h = hp^h.$$

最良の h を求めるため、隣り合う値を比較する。$E_h > 0$ であるから、

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} = \frac{(h+1)p^{h+1}}{hp^h} = \frac{(h+1)N}{h(N+1)},$$

であり、

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} \geq 1 \iff (h+1)N \geq h(N+1) \iff N \geq h,$$

等号は $h = N$ のときに限り成り立つ。よって

$$E_1 < E_2 < \cdots < E_N = E_{N+1} > E_{N+2} > \cdots .$$

この数列は $h = N$ まで狭義に増加し、次の値はそれと等しく、その後は狭義に減少する。したがって E_h の最大値は E_N であり、$h = N$ を選べば獲得額の期待値が最大になる。これが示すべきことであった。（$h = N+1$ を選んでも同じくらい良い。）最大値は $N(\frac{N}{N+1})^N$ である。

小問 (ii)

今度は、裏が 2 回続けて出たときにだけゲームが終わる。h 回目の表までの投げを、それぞれ表で終わる h 個のブロックに分けて考える。表が h 回に無事到達したならば、各ブロックは

$$\mathrm{H} \quad \text{または} \quad \mathrm{TH},$$

のいずれかである。裏が 2 回続けば、そこでゲームが終わっていたはずだからである。（最初の投げが裏であるのは構わない。その前には何もないからである。）逆に、このようなブロックを h 個並べた列は、裏が 2 回続くことを決して含まない。列の中の各裏は、表の直後か最初に現れ、かつ表の直前に現れるからである。したがって表が h 回に達するのは、投げの列がこれら 2 種類のブロック h 個に分割されるときに限る。

考えてみよう なぜブロックの確率を単純に掛け合わせてよいのだろうか？

表が出るたびに、ゲームは最初とまったく同じ状態に戻る。未解決の裏はなく、今後の投げは過去と独立である。よって各ブロックは、他のブロックとは独立に、確率

$$\mathrm{P(H)} + \mathrm{P(TH)} = p + qp = p(1+q) = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{N+2}{N+1} = \frac{N(N+2)}{(N+1)^2}.$$

で無事に終わる。（この 2 つの事象は最初の投げの結果が異なるので、互いに排反である。）したがって表が h 回に達する確率は $(\frac{N(N+2)}{(N+1)^2})^h$ であり、

$$E_h = \frac{hN^h(N+2)^h}{(N+1)^{2h}},$$

となる。これが示すべきことであった。

$N = 2$ の場合。 このとき

$$E_h = h\left(\frac{2 \cdot 4}{9}\right)^h = h\left(\frac{8}{9}\right)^h.$$

小問 (i) と同様に、

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} = \frac{8(h+1)}{9h} \geq 1 \iff 8h+8 \geq 9h \iff h \leq 8,$$

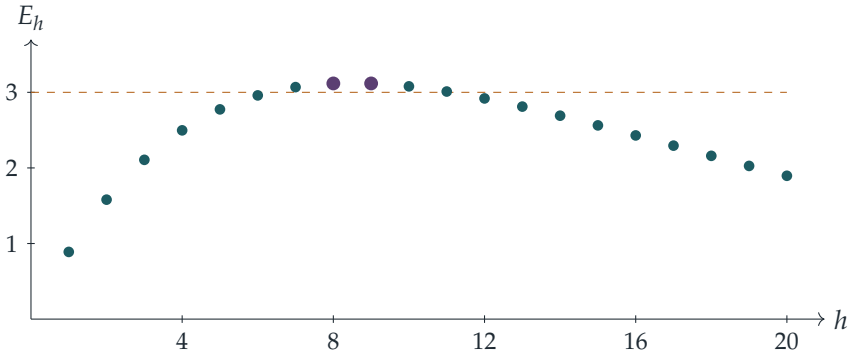
であり、等号は $h = 8$ のときに限り成り立つ。よって E_h は $h = 8$ まで狭義に増加し、$E_9 = E_8$ となり、その後は狭義に減少する。最大値は

$$E_8 = 8\left(\frac{8}{9}\right)^8 = \frac{2^3 \cdot 2^{24}}{3^{16}} = \frac{2^{27}}{3^{16}}.$$

である。これを見積もるために、3 を底とする対数をとり、$\log_3 2 \approx 0.63$ を用いると、

$$\log_3 E_8 = 27\log_3 2 - 16 \approx 27(0.63) - 16 = 17.01 - 16 = 1.01.$$

よって $E_8 \approx 3^{1.01}$ であり、これは $3^1 = 3$ にきわめて近い。獲得額の期待値の最大値はおよそ £3 である。



バージョン 2 で $N = 2$ のときの値 $E_h = h(8/9)^h$。$h = 8, 9$ における同率の最大値は、3 の破線のわずかに上にある。

検算

- バージョン 2 はバージョン 1 より有利になることはあっても不利になることはない。表だけが続く始まり方は、どちらでも無事だからである。実際、$\frac{N(N+2)}{(N+1)^2} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2} > \frac{N}{N+1}$ である。
- $N = 1$ のとき、バージョン 1 では $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}$ となる。表 1 回が確率 $\frac{1}{2}$、表 2 回が確率 $\frac{1}{4}$ である。
- 正確には $E_8 = 2^{27}/3^{16} = 134\,217\,728/43\,046\,721 \approx 3.118$ であるから、£3 という見積もりは良い。$N = 2$、$h = 8$ として 2×10^5 回のゲームをコンピュータでシミュレーションしたところ、平均獲得額は約 £3.11 であった。

よくある間違い

- バージョン 2 で、最初に裏が 1 回出るのは許されることを忘れたり、h 回目の表の後に裏が続いてもよいと誤解したりすること。h 回目の表が出た時点でただちにやめるのである。
- hp^h を微分して 0 とおくこと。これからは $h = -1/\ln p$ が得られるが、これは通常整数ではなく、最良の整数に直すには注意が必要である。比を調べる方法のほうがすっきりしていて、しかも厳密である。
- 同率を見落とすこと。$h = N$ と $h = N + 1$ は同じ期待値を与えるので、「show that（示せ）」が求めているのは、$h = N$ で最大値が達成されることだけである。

STEP のその先へ

これは単純な**最適停止**（optimal stopping）問題である。ここでは目標をあらかじめ固定しているが、そうしても何も失われないことが確かめられる。未解決の裏がない状態で表を H 回得ているとき、もう 1 回投げることによる利得が正になるのは、H が十分小さいときに限るのである。このように、「今やめる」と「もう 1 歩進む」を比較していつやめるかを決める問題は、マルチンゲール（martingale）や動的計画法（dynamic programming）へとつながる。小問 (ii) のブロックによる議論は、マルコフ連鎖（Markov chain）における再生（renewal）の考え方の最初の一端である。次の一歩としては、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。