解答例

# STEP II 2018、第 11 問

力学 ・ 摩擦とモーメント

> **STEP II 2018、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q11

## 鍵となる考え方

3 つの未知の接触力は、3 つの式で決まる。水平方向のニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）、鉛直方向に加速度がないこと、そして重心（centre of mass）のまわりのモーメント（moment）がつり合うという与えられた条件である。2 つの垂直抗力（normal reaction）をともに加速度（acceleration）$a$ で表してしまえば、2 種類の破綻はそれぞれ $a$ に対するしきい値となる。前輪は垂直抗力が 0 まで減ったときに浮き上がり、後輪は必要な摩擦力（friction）がその垂直抗力の $\mu$ 倍を超えたときに滑る。しきい値の低い方が先に起こる。

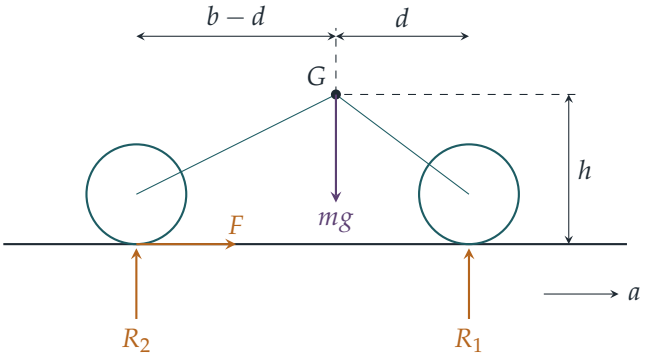
## 解答

### モデルと力

オートバイを、右向きに加速度 $a \geq 0$ で一直線上を運動する剛体（rigid body）とみなす。道路は水平なので、重心 $G$ には鉛直方向の加速度がなく、オートバイは回転しない。はたらく力は次のとおりである。

- $G$ に下向きにはたらく重力 $mg$。
- 前輪における垂直抗力 $R_1$（前輪はなめらかなので、そこに摩擦力ははたらかない）。
- 後輪における垂直抗力 $R_2$ と摩擦力 $F$。エンジンが後輪を駆動するので、$F$ は前向きにはたらき、これが唯一の水平方向の力である。

前輪の接地点は $G$ より水平距離 $d$ だけ前にあり、後輪の接地点は $G$ より $b - d$ だけ後ろにある。どちらも $G$ より距離 $h$ だけ下にある。




### 垂直抗力を $a$ で表す

水平方向と鉛直方向について、

$$F = ma, \qquad R_1 + R_2 = mg.$$

次に、反時計回りを正として（前輪を浮かせる向きである）$G$ のまわりのモーメントを考える。重力は $G$ のまわりにモーメントをもたない。$G$ より距離 $d$ だけ前で上向きにはたらく $R_1$ は、反時計回りのモーメント $R_1 d$ をもつ。$G$ より距離 $b-d$ だけ後ろで上向きにはたらく $R_2$ は、時計回りのモーメント $R_2(b-d)$ をもつ。そして $F$ は $G$ より距離 $h$ だけ下の直線に沿って前向きにはたらくので、反時計回りのモーメント $Fh$ をもつ。合計を 0 とおくと

$$R_1 d + Fh = R_2(b-d).$$

$F = ma$ と $R_1 = mg - R_2$ を代入すると

$$mgd - R_2 d + mah = R_2(b-d) \quad \Longrightarrow \quad R_2 = \frac{m(gd+ah)}{b},$$

したがって

$$R_1 = mg - R_2 = \frac{m\big((b-d)g - ah\big)}{b}.$$

$a$ が増加すると、荷重が前輪から後輪へ移る。すなわち $R_1$ は減少し、$R_2$ は増加する。

### それぞれの破綻はいつ起こるか

**前輪。**前輪が道路に接したままであるのは $R_1 \geq 0$ のとき、すなわち

$$a \leq \frac{(b-d)g}{h} =: a_{\text{lift}}.$$

のときである。

**後輪。**後輪が滑らないのは $F \leq \mu R_2$ のとき、すなわち

$$ma \leq \frac{\mu m(gd+ah)}{b} \iff a(b-\mu h) \leq \mu dg.$$

のときである。

**考えてみよう** 不等号の向きを変えずに $b-\mu h$ で割ってよいのはなぜか。

与えられた条件 $\mu < b/h$ はまさにこのためにある。この条件は $b-\mu h > 0$ を意味する。よって後輪が路面をとらえているのは

$$a \leq \frac{\mu d g}{b-\mu h} =: a_{\text{slip}}.$$

のときである。（この条件がなければ、得られる摩擦力は必要な摩擦力と少なくとも同じ速さで増加し、後輪は決して滑らない。）

2 つのしきい値はともに正であり、$a$ を 0 から増加させたとき後輪が先に滑るのは、ちょうど $a_{\text{slip}} < a_{\text{lift}}$ のときである。$b-\mu h > 0$ かつ $h > 0$ なので、分母を払うことができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\mu d g}{b-\mu h} < \frac{(b-d)g}{h} &\iff \mu d h < (b-d)(b-\mu h) \\
&\iff \mu d h + \mu h(b-d) < b(b-d) \\
&\iff \mu h b < b(b-d) \\
&\iff \mu < \frac{b-d}{h},
\end{aligned}$$

最後の段階では $bh > 0$ で割った。よって $(*)$ が成り立てば、前輪が接地を失う前に後輪が滑る。これが示すべきことであった。（実際、この同値の連鎖は 2 つの主張が同値であることを示している。）

### $(*)$ が成り立つときの最大加速度

$(*)$ が成り立てば $a_{\text{slip}} < a_{\text{lift}}$ である。$a_{\text{slip}}$ 以下の加速度はどれも両方の条件を満たすので、前輪は接地したままで、後輪は路面をとらえている。それより大きな加速度では $F > \mu R_2$ が必要になる。よって滑らずに出せる最大加速度は

$$a_{\max} = \frac{\mu d g}{b-\mu h},$$

であり、これが示すべきことであった。

### $(*)$ が成り立たないとき

このとき $\mu \geq \dfrac{b-d}{h}$ なので、同じ同値の連鎖（$<$ の代わりに $\geq$ としたもの）により $a_{\text{lift}} \leq a_{\text{slip}}$ が得られる。したがって $a_{\text{lift}}$ 以下の加速度はどれも $R_1 \geq 0$ を保ち、しかも $a \leq a_{\text{slip}}$ を満たすので、後輪は滑らない。$a_{\text{lift}}$ を超えると $R_1 < 0$ が必要になるが、前

輪が道路に接している限りそれは不可能である。よって前輪が接地したまま出せる最大加速度は

$$a_{\max} = \frac{(b-d)g}{h}.$$

である。この加速度では $R_1 = 0$ となる。オートバイはちょうどウィリー（wheelie）を起こす寸前であり、全荷重が後輪にかかっている。

## 検算

- $a = 0$ のとき、$R_2 = mgd/b$、$R_1 = mg(b-d)/b$ であり、これはてこの原理（lever rule）による通常の静的な荷重配分である。$G$ に近い方の車輪がより大きな荷重を支える。
- 境界の場合 $\mu = (b-d)/h$ では $b - \mu h = d$ なので、$a_{\text{slip}} = \mu g = (b-d)g/h = a_{\text{lift}}$ となる。2 つの答えは、当然そうあるべきとおり一致する。
- 数値例：$b = 1.5\,\text{m}$、$d = 0.75\,\text{m}$、$h = 0.6\,\text{m}$、$\mu = 0.8$、$g = 9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ とする。このとき $(b-d)/h = 1.25 > \mu$ であり、$a_{\text{slip}} = 5.88/1.02 \approx 5.76\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ は $a_{\text{lift}} = 12.25\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ を大きく下回る。多数のランダムなオートバイについて $a$ を段階的に増やし、どちらの条件が先に破れるかを記録するコンピュータによる検証も、両方の公式と一致した。

## よくある間違い

- 摩擦力のモーメントの符号を間違える。$G$ より下ではたらく前向きの摩擦力は前輪を浮かせる向きにはたらく。加速によって前輪の荷重が減るのはこのためである。
- $b - \mu h$ が正である理由を述べずにそれで割る。条件 $\mu < b/h$ の役割はそれだけである。
- 接地点のまわりのモーメントをとり、その合計を 0 とおく。オートバイは加速しているので、モーメントは $G$ のまわりではつり合うが、他の点のまわりではつり合わない。

## STEP のその先へ

モーメントについて与えられた条件は、重心のまわりの角運動量（angular momentum）の変化率がそのまわりの全トルク（torque）に等しいという剛体の法則の特別な場合である。ここではオートバイが回転しないので、角運動量は 0 である。それ以外の点のまわりでは、加速している物体には $ma$ に由来する「見かけの」トルクが余分に加わ

る。これが最後のよくある間違いの理由である。同じ荷重移動の解析は、車両運動力学における制動やトラクションの限界の基礎となっている。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は剛体の力学を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。