解答例

STEP II 2018、第 10 問

力学 ・ 伸びる糸の上の運動学

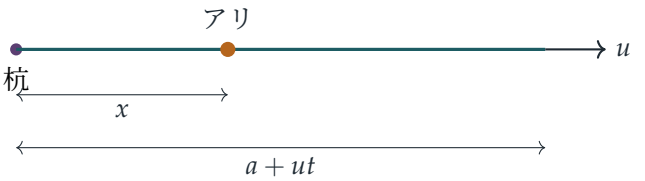
> **STEP II 2018、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.12 節「ゴムひもの上のアリ」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/rubber-rope.html

鍵となる考え方

ひもは一様（uniform）なので、どこでも同じ倍率で伸びる。したがって、ひもの各点は端から端までのうちの割合としての位置を保ち続ける。このことから、ひもの点の速さは杭からの距離に比例する。するとアリの方程式は線形（linear）になり、追いかけるべき自然な量は x そのものではなく、ひも全体に対してアリが進んだ割合 $x/(a+ut)$ である。

解答



ひもの点の速さ

時刻 t において自由端は杭から距離 $a+ut$ のところにあるので、これがひもの長さである。ひもは一様なので、全長にわたって同じ倍率 $(a+ut)/a$ で伸びている。したがって、$t=0$ で杭から距離 x_0 にあったひもの点は、常にひも全体の同じ割合 x_0/a の位

置にある：

$$x = \frac{x_0}{a}(a + ut).$$

x_0 を固定して微分すると、この点の速さは $\dfrac{x_0 u}{a}$ であり、これを現在の位置 x を用いて表すと、

$$\text{杭からの距離で表した点の速さ：距離} x = \frac{ux}{a + ut}.$$

確認として、これは杭では 0、自由端では u となる。

アリの方程式

杭に対するアリの速さは、v に、その下にあるひもの速さを加えたものなので、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a + ut}.$$

商の微分法（quotient rule）を用い、続いてこの方程式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a + ut}\right) &= \frac{1}{a + ut}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{ux}{(a + ut)^2} \\ &= \frac{1}{a + ut}\left(v + \frac{ux}{a + ut}\right) - \frac{ux}{(a + ut)^2} = \frac{v}{a + ut}\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られる。

端に到達するまでの時間

$t = 0$ で $x = 0$ であることを用いて、0 から t まで積分する：

$$\frac{x}{a + ut} = \int_0^t \frac{v}{a + us}\,\mathrm{d}s = \frac{v}{u}\ln\left(\frac{a + ut}{a}\right) = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{ut}{a}\right).$$

左辺はアリがひものうち進んだ割合であり、これが 1 に等しくなったときにアリは端に到達する。右辺は 0 から限りなく単調に増加するので、これはちょうど一度だけ起こり、その時刻 T は

$$\ln\left(1 + \frac{uT}{a}\right) = k \iff 1 + \frac{uT}{a} = \mathrm{e}^k \iff uT = a(\mathrm{e}^k - 1)$$

を満たす。これが与えられた結果である。

帰り道

今度はアリは杭に向かって歩くので、ひもに対するアリ自身の速さは $-v$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v + \frac{ux}{a + ut}.$$

考えてみよう 商の微分法の計算をやり直す必要があるだろうか？

その必要はない。上の計算は v の符号が変わるだけなので、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}.$$

帰り道は時刻 $t = T$ に、アリがひもの端にいる状態、すなわち $x/(a+ut) = 1$ の状態から始まる。T から t まで積分すると、

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{a+ut}{a+uT}\right).$$

この割合が 0 になったときにアリは杭に到達し、それが初めて起こる時刻 t_1 は

$$\ln\left(\frac{a+ut_1}{a+uT}\right) = k \iff a+ut_1 = (a+uT)\,\mathrm{e}^k$$

を満たす。よって帰り道にかかる時間は

$$t_1 - T = \frac{(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)}{u}.$$

行きの結果から $\mathrm{e}^k - 1 = uT/a$ かつ $a+uT = a\mathrm{e}^k$ なので、

$$t_1 - T = \frac{a\mathrm{e}^k}{u}\cdot\frac{uT}{a} = T\mathrm{e}^k.$$

帰り道にかかる時間は $T\mathrm{e}^k$ であり、行きよりも e^k 倍長い。

検算

- $u \to 0$ とするとひもは伸びない。このとき $k \to 0$ かつ $T = a(\mathrm{e}^k-1)/u \to a/v$ であり、帰りの時間 $T\mathrm{e}^k \to a/v$ も同様となる。これは当然そうあるべき結果である。
- 帰りの時間の方が長いのは理にかなっている。帰り道では、アリの下にあるひもがアリを杭から遠ざける向きに運ぶからである。
- a、u、v に無作為な値を与えて（たとえば $a=1$、$u=v$ とすると $k=1$、$T = \mathrm{e}-1 \approx 1.718$）両方の微分方程式（differential equation）を数値的に時間発展させると、アリは時刻 T に端に達し、さらに $T\mathrm{e} \approx 4.67$ の後に杭に戻る。これは公式と一致する。

よくある間違い

- ひものすべての点が速さ u で動くとしてしまうこと。速さ u で動くのは自由端だけである。

- 帰り道が $t = 0$ ではなく $t = T$ から始まることを忘れ、積分定数（constant of integration）が変わることを見落とすこと。
- T と k のみで表すよう求められているのに、答えを $(a + uT)(\mathrm{e}^k - 1)/u$ のままにしておくこと。

STEP のその先へ

ひもがどれほど速く伸びても、アリは必ず端に到達する。それは $\int \mathrm{d}t/(a + ut)$ が発散（diverge）するからである。ひもに対してアリが進んだ割合は時間の対数のように増加し、もし伸び方がもっと速ければ（たとえば指数関数的であれば）、積分は収束（converge）し、アリは決して到達しないかもしれない。それ自体が膨張している空間の中を一定の速さで進むという同じ考え方は宇宙論（cosmology）にも現れ、遠方の銀河からの光がいつか私たちに届くかどうかを決定する。ここで適切な量を見抜くことで解いた線形方程式は、積分因子法（integrating-factor method）の一例である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。