解答例

STEP II 2018、第 1 問

純粋数学 • 多項式の根

> **STEP II 2018、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q1

鍵となる考え方

係数（coefficient）を前から読んでも後ろから読んでも同じなので、x^2 で割ると、この 4 次式（quartic）は $t = x + \frac{1}{x}$ の 2 次式（quadratic）になる。t の各値は 4 次方程式の根（root）の組 $k, \frac{1}{k}$ を与える。また実数 x からは $|t| \geq 2$ しか得られず、$t = \pm 2$ となるのはちょうど $x = \pm 1$ のときである。したがって、相異なる根の個数を数える問題は、t がどのような値をとるか、そしてそのいずれかが ± 2 であるかどうかを調べる問題に帰着する。

解答

根は逆数の組で現れる

$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ とおく。$P(0) = 1 \neq 0$ であるから、任意の根 k は零ではなく、

$$k^4 P\left(\tfrac{1}{k}\right) = 1 + ak + bk^2 + ak^3 + k^4 = P(k) = 0.$$

$k^4 \neq 0$ であるから $P(\frac{1}{k}) = 0$ となり、k^{-1} も根である。すなわち、根は逆数（reciprocal）どうしの組で現れる。

置換 $t = x + \frac{1}{x}$

$P(x) = 0$ の両辺を x^2 で割り（$x \neq 0$ なので許される）、$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ を用いると、

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \iff t^2 + at + (b - 2) = 0.$$

この 2 次方程式の根を t_1, t_2 とすると、$t_1 + t_2 = -a$ かつ $t_1 t_2 = b - 2$ である。展開すると

$$P(x) = (x^2 - t_1 x + 1)(x^2 - t_2 x + 1),$$

が成り立つことがわかる。実際、右辺は $x^4 - (t_1 + t_2)x^3 + (2 + t_1 t_2)x^2 - (t_1 + t_2)x + 1$ となるからである。よって、P の根は、$x^2 - t_1 x + 1$ の根と $x^2 - t_2 x + 1$ の根を合わせたものである。

ここで、すべての根が実数であるという仮定を用いる。各因数（factor）$x^2 - t_i x + 1$ は 2 つの実数解 k と $\frac{1}{k}$ をもち（その積は 1 である）、$t_i = k + \frac{1}{k}$ は実数である。実数 $k \neq 0$ に対して、$k + \frac{1}{k}$ は k と同じ符号をもち、

$$\left|k + \tfrac{1}{k}\right| - 2 = \frac{(|k| - 1)^2}{|k|} \geq 0,$$

であって、等号は $k = \pm 1$ のときに限り成り立つ。よって次のようになる。

- $|t_i| > 2$ ならば、因数 $x^2 - t_i x + 1$ は相異なる 2 つの実数解をもち、そのいずれも ± 1 ではない。
- $t_i = 2$ ならば、この因数は $(x - 1)^2$ であり、$t_i = -2$ ならば $(x + 1)^2$ である。

また、x によって $t = x + \frac{1}{x}$ が定まるので、異なる t の値が共通の根 x をもつことはない。

小問 (i)

相異なる根が k ただ 1 つならば $\frac{1}{k} = k$ であるから、$k = \pm 1$ かつ $P(x) = (x \mp 1)^4$ である。展開すると

$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1, \qquad (x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$

となり、どちらも求める形をしている。よって、求める値は $a = -4$, $b = 6$ と $a = 4$, $b = 6$ である。

小問 (ii)

t_1, t_2（いずれも $|t_i| \geq 2$ を満たす実数）について、起こりうる場合を順に調べる。

- $t_1 \neq t_2$ で、どちらも $|t_i| > 2$ のとき：相異なる根は 4 つ。
- $t_1 = t_2$ のとき：4 次式は完全平方（perfect square）$(x^2 - t_1 x + 1)^2$ であるから、相異なる根は $|t_1| > 2$ ならば 2 つ、$t_1 = \pm 2$ ならば 1 つである。
- $\{t_1, t_2\} = \{2, -2\}$ のとき：$P(x) = (x - 1)^2 (x + 1)^2$ であり、相異なる根は 2 つ。

- t_i の一方が ± 2 で、他方の絶対値が 2 より大きいとき：根は ± 1（重根（double root））と他の 2 つであり、相異なる根は 3 つ。

考えてみよう なぜ t の値の一方は ± 2 でなければならないのか？

4 つの根のうち相異なるものが 3 つということは、ある根が重複しているということであり、上の場合分けから、相異なる根が 3 つとなるのは最後の場合に限られる。より直接的にいえば、根は逆数どうしの組に分かれるので、相異なる根の個数が奇数ならば、ある根は自分自身の逆数、すなわち ± 1 でなければならない。

よって、$t = 2$ または $t = -2$ が $t^2 + at + b - 2 = 0$ の根である。

$$\begin{aligned} t = 2: &\quad 4 + 2a + b - 2 = 0 \iff b = -2a - 2, \\ t = -2: &\quad 4 - 2a + b - 2 = 0 \iff b = 2a - 2. \end{aligned}$$

したがって、題意のとおり $b = 2a - 2$ または $b = -2a - 2$ である。

小問 (iii)

$b = 2a - 2$ のとき、t の 2 次式は

$$t^2 + at + 2a - 4 = (t + 2)(t + a - 2),$$

となるので、$t_1 = -2$ かつ $t_2 = 2 - a$ である。前者からは $(x + 1)^2$ が得られ、後者からは $x^2 - (2 - a)x + 1 = 0$ が得られるので、

$$x = -1 \text{（2 重）}, \qquad x = \frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}.$$

すべての根が実数であると与えられているので、これらは実数である。これは $a^2 - 4a = a(a - 4) \geq 0$、すなわち $a \leq 0$ または $a \geq 4$ と同値である。

最後の小問

(ii) より、相異なる根が 3 つであるためには $b = 2a - 2$ または $b = -2a - 2$ が必要である。逆に、$b = 2a - 2$（かつすべての根が実数）と仮定する。(iii) より t の値は -2 と $2 - a$ であり、上の場合分けから、$2 - a = \pm 2$ でない限り相異なる根はちょうど 3 つである。

- $a = 0, b = -2$：$t = \pm 2$ であり、$P(x) = (x^2 - 1)^2$ となって、相異なる根は 2 つしかない。
- $a = 4, b = 6$：$t = -2$ が 2 重であり、$P(x) = (x + 1)^4$ となって、根は 1 つである。

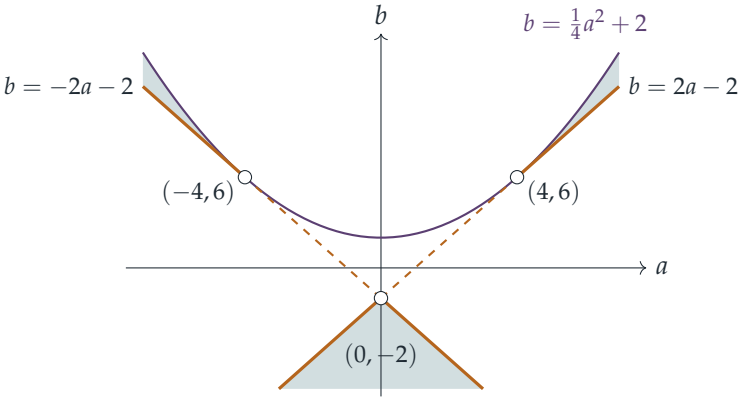
x を $-x$ に置き換えると、P は a を $-a$ に置き換えた同じ形の式になり、これにより 2 本の直線が入れ替わる。よって $b=-2a-2$ のとき、t の値は 2 と $-a-2$ であり、例外は $a=0, b=-2$ と $a=-4, b=6$ である。

したがって、すべての根が実数であるような実数 a, b に対して、$(*)$ が相異なる根をちょうど 3 つもつための必要十分条件は

$$b=2a-2 \text{ または } b=-2a-2, \qquad \text{ただし} (a,b)\neq(0,-2),\ (4,6),\ (-4,6).$$

である。なお、$(4,-10)$ と $(-4,-10)$ は除外されないことに注意する。たとえば $a=4$, $b=-10$ のとき $t=2$ と $t=-6$ となり、相異なる根は 3 つである。

下図は (a,b) 平面を表している。網掛けの領域は、すべての根が実数となる範囲である。すなわち、両方の直線の下側（t の一方の値が -2 以下で、他方が 2 以上）、または $|a|\geq 4$ における直線と放物線（parabola）$b=\frac{1}{4}a^2+2$ の間（t の 2 つの値が同じ側にある）である。放物線は $t_1=t_2$ となる点の集合であり、直線と $(\pm 4,6)$ で接する。答えは、網掛け領域の境界上にある 2 本の直線の実線部分から、3 つの白丸を除いたものである。



（直線の破線部分 $0<|a|<4$ は、すべての根が実数となる領域の外にある。(iii) で $a\leq 0$ または $a\geq 4$ が必要だったのはこのためである。）

検算

- $a=-4, b=-10$（$b=2a-2$ 上にあり、除外されない）をとる。このとき (iii) から $x=-1,-1,3\pm 2\sqrt{2}$ が得られ、実際 $(x+1)^2(x^2-6x+1)=x^4-4x^3-10x^2-4x+1$ である。根 $3\pm 2\sqrt{2}\approx 5.828,\ 0.172$ は、予想どおり互いに逆数になっている。
- 除外点 $a=0, b=-2$ では、4 次式は $x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2$ となり、相異なる根は 2 つしかない。

- $|a| \le 10$, $|b| \le 15$ の範囲で刻み幅 $\frac{1}{4}$ の格子上のすべての (a, b) について、コンピュータで根を数値的に求めた。すべての根が実数となる 1579 個の格子点のうち、相異なる根が 3 つとなったのは、上の条件から予測されるちょうど 88 個であった。

よくある間違い

- 例外点を忘れる：$(0, -2)$ と $(4, 6)$ がこの直線上にあるので、$b = 2a - 2$ だけでは必要条件であって十分条件ではない。
- 重複する根は ± 1 でなければならないと思い込む：組が重複した $k, k, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}$ もありうるが、その場合の相異なる根は 3 つではなく 2 つである。

STEP のその先へ

係数を前から読んでも後ろから読んでも同じ多項式は**回文多項式**（palindromic polynomial、あるいは相反多項式）とよばれ、置換 $t = x + \frac{1}{x}$ を用いると、偶数次のこうした多項式の次数を半分にできる。同じ置換で $x = e^{i\theta}$ とおくと $t = 2\cos\theta$ となる。これは $2\cos(2\pi/n)$ の最小多項式（minimal polynomial）を求める方法であり、ガウス（Gauss）が正 17 角形を扱った方法でもある。上の (a, b) 平面の曲線のように、多項式の根がどこで重なるかを記述するという考え方は、**判別式**（discriminant）へとつながる。多項式とその根についてさらに学ぶには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。