解答例

STEP I 2018、第 9 問

力学 ・ 斜面上の運動

STEP I 2018、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

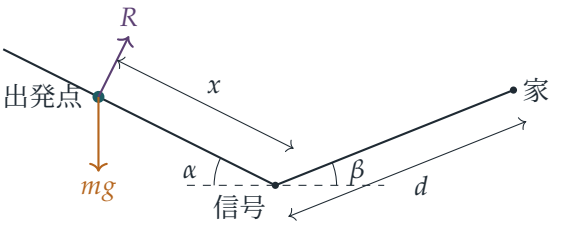
step.maths.org/questions/18-s1-q9

鍵となる考え方

抵抗がないので、ゴーカートは各直線区間で一定の加速度をもつ。最初の斜面を下るときは $g\sin\alpha$ の加速度、2 番目の斜面を上るときは $g\sin\beta$ の減速度である。したがって各区間は等加速度運動（constant acceleration）の問題であり、2 つの区間は信号での速さによってつながっている。そもそも家にたどり着けるかどうかはエネルギー（あるいは $v^2 = u^2 + 2as$）で決まる。所要時間は各区間で $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ を用いて求め、残りは k を用いた丁寧な式変形である。

解答

ゴーカートと乗り手を、摩擦も空気抵抗もなく各最大傾斜線に沿って運動する質点（particle）としてモデル化する。はたらく力は重力 mg と垂直抗力（normal reaction）R のみであり、垂直抗力は仕事をしない。



家に到達する条件

最初の斜面に沿って力を分解すると、重力の斜面下向きの成分は $mg\sin\alpha$ であるから、加速度は $g\sin\alpha$ である。静止状態から出発して距離 x だけ進むと、信号での速さ V は

$$V^2 = 2gx\sin\alpha.$$

を満たす。速さが急に変化することはないので、2 番目の区間には速さ V で上り始め、今度は重力によって斜面に沿って $g\sin\beta$ の減速度が生じる。信号から距離 s だけ先の地点での速さ v は $v^2 = V^2 - 2gs\sin\beta$ を満たす。家に到達するためには、$s = d$ に至るまでずっと v^2 が負にならなければよい。すなわち

$$2gx\sin\alpha - 2gd\sin\beta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x\sin\alpha \geq d\sin\beta,$$

であり、これが示すべきことであった。（同じことであるが、エネルギー保存則（conservation of energy）により、出発点の高さより上に上がることはできない。出発点は信号より $x\sin\alpha$ だけ高く、家は信号より $d\sin\beta$ だけ高い。）

全所要時間

式変形を見通しよくするため、$c = \left(\frac{1}{2}g\sin\alpha\right)^{1/2}$ とおく。すると $g\sin\alpha = 2c^2$ であり、$\sin\beta = \sin\alpha/k$ であるから $g\sin\beta = 2c^2/k$ となる。

最初の区間。 $x = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t_1^2 = c^2t_1^2$ より、信号までの所要時間は $t_1 = \sqrt{x}/c$ であり、そこでの速さは $V = (g\sin\alpha)t_1 = 2c\sqrt{x}$ である。

2 番目の区間。 信号から s を測ると $s = Vt - \frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2$ であるから、$s = d$ に達するまでの時間 t_2 は

$$\frac{c^2}{k}\,t_2^2 - 2c\sqrt{x}\,t_2 + d = 0.$$

を満たす。

> **考えてみよう** この 2 次方程式には解が 2 つある。家に到着する時刻はどちらだろうか。

大きい方の解は、限りなく長い斜面上の質点が、いったん止まってから下り戻る途中で再び $s = d$ を通過する時刻である。家に到着するのは初めて $s = d$ に達したときであるから、求めるのは小さい方の解である：

$$t_2 = \frac{2c\sqrt{x} - \sqrt{4c^2x - 4c^2d/k}}{2c^2/k} = \frac{k}{c}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x - \tfrac{d}{k}}\right) = \frac{1}{c}\left(k\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}\right),$$

ここで $k > 0$ より $k\sqrt{x - d/k} = \sqrt{k^2x - kd}$ を用いた。平方根が実数になるのはまさに $x \geq d/k$ のときであり、これは前半で得た条件 $x\sin\alpha \geq d\sin\beta$ にほかならない。

足し合わせると、$T = t_1 + t_2$ について

$$\left(\frac{g\sin\alpha}{2}\right)^{1/2} T = cT = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd},$$

が得られ、これが求める結果である。

T の最小化

c は正の定数であるから、$x \geq d/k$ の範囲で $f(x) = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}$ を最小化すればよい。微分すると

$$f'(x) = \frac{1+k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{2\sqrt{k^2x - kd}}.$$

である。$f'(x) = 0$ とおくと $(1+k)\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}$ を得る。両辺とも正であるから、2 乗しても情報は失われない：

$$\begin{aligned}(1+k)^2(k^2x - kd) &= k^4x \\ x\left[(1+k)^2k^2 - k^4\right] &= (1+k)^2kd \\ xk^2(1+2k) &= (1+k)^2kd,\end{aligned}$$

ここで $(1+k)^2 - k^2 = 1 + 2k$ を用いた。$k^2(1+2k) > 0$ で割ると

$$x = \frac{(1+k)^2}{k(1+2k)}\, d.$$

となる。これは許される出発点である。実際、$(1+k)^2 = 1 + 2k + k^2 > 1 + 2k$ であるから、この x は d/k より真に大きく、家に到達できる。

最適な x が存在するのはもっともである。近すぎる地点から出発すると坂の最後の区間をのろのろと進むことになり、遠すぎる地点から出発すると最初の斜面に長い時間を費やすことになる。

検算

- 最適点では $\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}/(1+k)$ であるから、$cT = \sqrt{x}\,\dfrac{1+2k}{1+k} = \sqrt{\dfrac{(1+2k)d}{k}}$ となり、最小時間は気持ちのよいほど簡潔な形になる。
- $\alpha = \beta$、すなわち $k = 1$ とする。このとき最適点は $x = \frac{4}{3}d$ であり、公式から $cT = 2\sqrt{4d/3} - \sqrt{d/3} = \sqrt{3d}$ が得られ、直前の検算と一致する。
- ちょうど境界の $x = d/k$ では家の戸口にかろうじてたどり着くだけであり、$f'(x) \to -\infty$ となるので、出発点を少し後ろにずらせば確実に時間が短縮される。

- いくつかの無作為な角度と距離について、短い時間間隔ごとに運動を数値的に進めて計算したところ、T の公式が有効数字 5 桁まで再現された。また、コンピュータで x を探索すると、最小値は上で求めた値のところにあった。

よくある間違い

- t_2 の 2 次方程式で大きい方の解をとってしまう。それは下り戻りながら家を通過する時刻である。
- 信号での速さは与えられておらず、最初の区間から引き継がなければならないことを忘れる。
- 条件 $x \geq d/k$ を落としてしまう。これこそが $\sqrt{k^2x - kd}$ を実数にする条件である。

STEP のその先へ

最小時間がすっきりした形になることは、より広いテーマを示唆している。移動時間を最小にするように経路や出発点を選ぶ問題は**変分法**（calculus of variations）の主題であり、その最も有名な問題である最速降下線（brachistochrone）の問題は、重力のもとで最も速く降下する曲線を求めるものである。大学 1 年の力学では、保存力（conservative force）については質点が到達できる場所はエネルギーだけでわかるが、時間を求めるには運動方程式（equation of motion）を積分する必要がある、という考え方にも出会うだろう。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この両方の考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。