解答例

STEP I 2018、第 8 問

純粋数学 ・ 連立微分方程式

> **STEP I 2018、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q8

鍵となる考え方

2 つの導関数（derivative）の規則は、互いに打ち消し合うように作られている。s' が現れるたびに c^2 がもたらされ、c' が現れるたびに $-\mathrm{s}^2$ がもたらされる。したがって、全体を通して自然な方針は、積や商を微分して項がまとまっていく様子を観察し、そのうえで (i) の恒等式（identity）を用いてすべてを 1 つの関数で表すことである。積分については、各被積分関数（integrand）を「何か $\times\, \mathrm{s}^2$」あるいは「何か $\times\, \mathrm{c}^2$」と読むとよい。これらこそ、導関数がわかっている形だからである。最後の 2 つの小問に出てくる u の積分は、同じ積分が姿を変えたものにすぎない。

解答

以下、紛れのないときは $\mathrm{s}(x)$ と $\mathrm{c}(x)$ をそれぞれ s、c と書く。

小問 (i)

合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3\right)=3\mathrm{s}^2\,\mathrm{s}'+3\mathrm{c}^2\,\mathrm{c}'=3\mathrm{s}^2\mathrm{c}^2-3\mathrm{c}^2\mathrm{s}^2=0,$$

であるから、$\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3$ は定数である。$x=0$ におけるその値は $0^3+1^3=1$ であるから、

$$\mathrm{s}(x)^3+\mathrm{c}(x)^3=1 \quad （任意の x,$$

となり、示すべきことが得られた。この恒等式がこの問題の残りすべてを動かす原動力である。これにより、s^3 を $1-\mathrm{c}^3$ に置き換えたり、その逆を行ったりできる。

小問 (ii)

積の微分法（product rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc}) = \mathrm{s}'\mathrm{c} + \mathrm{s}\mathrm{c}' = \mathrm{c}^2 \cdot \mathrm{c} + \mathrm{s} \cdot (-\mathrm{s}^2) = \mathrm{c}^3 - \mathrm{s}^3.$$

(i) より $\mathrm{s}^3 = 1 - \mathrm{c}^3$ であるから、これは $\mathrm{c}^3 - (1 - \mathrm{c}^3) = 2\mathrm{c}^3 - 1$ に等しく、求める結果である。

商については（$\mathrm{c}(x) \neq 0$ となる範囲で）、商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}}\right) = \frac{\mathrm{s}'\mathrm{c} - \mathrm{s}\mathrm{c}'}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{c}^3 + \mathrm{s}^3}{\mathrm{c}^2} = \frac{1}{\mathrm{c}(x)^2},$$

となる。ここでも (i) を用いた。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ との美しい類似に注目しよう。

小問 (iii)

$\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$ であるから、1 つ目の積分はただちに求まる。

$$\int \mathrm{s}(x)^2 \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + C.$$

考えてみよう 既知の導関数 $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$ が現れるようにするには、s^5 をどう書けばよいか。

因数 s^2 を切り出し、残りに (i) を用いる。すなわち $\mathrm{s}^5 = \mathrm{s}^3 \cdot \mathrm{s}^2 = (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{s}^2 = -(1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}'$ である。これは $g(\mathrm{c})\,\mathrm{c}'$ の形をしており、合成関数の微分法を逆にたどることで積分できる。

$$\int \mathrm{s}(x)^5 \,\mathrm{d}x = -\int (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}' \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + \tfrac{1}{4}\mathrm{c}(x)^4 + C.$$

（微分して確かめると、$-\mathrm{c}' + \mathrm{c}^3\mathrm{c}' = -\mathrm{c}'(1 - \mathrm{c}^3) = \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{s}^3$ となり、確かに正しい。）

小問 (iv)

$u = \mathrm{s}(x)$ とおくと、$x = \mathrm{s}^{-1}(u)$ であり、$\mathrm{d}u = \mathrm{s}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{c}(x)^2\,\mathrm{d}x$ である。(i) より $\mathrm{c}^3 = 1 - u^3$ であるから $\mathrm{c} = (1 - u^3)^{1/3}$（実数の立方根であり、c の符号によらず成り立つ）となり、したがって

$$(1 - u^3)^{2/3} = \mathrm{c}(x)^2.$$

ゆえに

$$\int \frac{1}{(1 - u^3)^{2/3}} \,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathrm{c}^2 \,\mathrm{d}x = \int 1 \,\mathrm{d}x = x + C = \mathrm{s}^{-1}(u) + C,$$

となり、これが示すべきことであった。

小問 (v)

同じ置換（substitution）を用い、$(1-u^3)^{1/3}=\mathrm{c}$、$\mathrm{d}u=\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$ とする。

1 つ目の積分では $(1-u^3)^{4/3}=\mathrm{c}^4$ であるから、(ii) の商に関する結果により

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{(1-u^3)^{4/3}}=\int\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{c}^4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{c}^2}=\frac{\mathrm{s}(x)}{\mathrm{c}(x)}+C=\frac{u}{(1-u^3)^{1/3}}+C.$$

2 つ目については、

$$\int(1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u=\int\mathrm{c}\cdot\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x.$$

(ii) の積に関する結果は $\mathrm{c}^3=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc})\right)$ を意味するから、

$$\int\mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}(x+\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x))+C.$$

$x=\mathrm{s}^{-1}(u)$ および $\mathrm{sc}=u(1-u^3)^{1/3}$ を用いて u に戻すと、

$$\int(1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u=\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{s}^{-1}(u)+u(1-u^3)^{1/3}\right)+C.$$

検算

- (v) の答えは u で微分することで確かめられる。たとえば、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\frac{u}{(1-u^3)^{1/3}}=\frac{1}{(1-u^3)^{1/3}}+\frac{u^3}{(1-u^3)^{4/3}}=\frac{1}{(1-u^3)^{4/3}}.$$

- 微分方程式（differential equation）を $x=1.2$ まで数値的に解くと $\mathrm{s}(1.2)\approx0.9411$、$\mathrm{c}(1.2)\approx0.5500$ となり、確かに $0.9411^3+0.5500^3\approx1$ である。$U=\mathrm{s}(1.2)$ とすると、数値積分により $\int_0^U(1-u^3)^{-2/3}\,\mathrm{d}u\approx1.2000$ となって (iv) の予測どおりであり、また $\int_0^U(1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u\approx0.8588=\frac{1}{2}(1.2+0.9411\times0.5500)$ となって (v) と一致する。
- 数値的に $\int_0^{1.2}\mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x\approx0.4500=1-\mathrm{c}(1.2)$ であり、(iii) と合致する。

よくある間違い

- $\int\mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x=+\mathrm{c}+C$ と書いてしまう。$\mathrm{c}'=-\mathrm{s}^2$ のマイナス符号は落としやすい。
- (iv) と (v) で、$\mathrm{d}u$ を $\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$ に変換し忘れる、あるいは最終的な答えを u ではなく x で表したままにしてしまう。
- (v) で、(ii) がすでにそれを導関数と定数の和として表していることに気づかず、c^3 を直接積分しようとする。

STEP のその先へ

組 s, c は、円 $x^2 + y^2 = 1$ の代わりに曲線 $x^3 + y^3 = 1$ に対する sin と cos のようにふるまう。このような「一般化三角関数（generalised trigonometric functions）」は楕円関数（elliptic functions）の近い親戚である。楕円関数は、ちょうど $\sin^{-1} u = \int (1 - u^2)^{-1/2} \, \mathrm{d}u$ のように、(iv) のような積分の逆関数をとることで現れる。初期条件（initial conditions）つきの微分方程式によって関数を定義し、その性質をすべてそこから導くというのは大学 1 年次の標準的な手法であり、関数が「一意に定まる」という仮定は、常微分方程式（ODE）の解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）にほかならない。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、その理論と連立系の多くの例の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。