解答例

STEP I 2018、第 7 問

純粋数学 • 3 次方程式の解法

> **STEP I 2018、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q7

鍵となる考え方

この置換はメビウス変換（Möbius transformation）であり、分母を払うと z^2 の項と z の項が打ち消し合い、z^3 と定数だけが残るように選ばれている。$az^3+b=0$ の形の三次方程式（cubic equation）は簡単に解けるので、仕事のすべては、一般の簡約された三次方程式 $x^3-3cx+d=0$ をこの特別な形に持ち込むことにある。そのためには和と積から 2 数を求めればよく、これは二次方程式の問題である。それが相異なる実数解をもつための条件こそが、$d^2>4c^3$ の由来である。

解答

小問 (i)

$x=\dfrac{pz+q}{z+1}$ とおき、方程式の両辺に $(z+1)^3$ を掛けると

$$(pz+q)^3-3pq(pz+q)(z+1)^2+pq(p+q)(z+1)^3=0.$$

$(pz+q)(z+1)^2=pz^3+(2p+q)z^2+(p+2q)z+q$ が必要になる。ここで z の累乗ごとに整理する。

$$\begin{aligned}
z^3:&\quad p^3-3p^2q+p^2q+pq^2=p(p^2-2pq+q^2)=p(p-q)^2,\\
z^2:&\quad 3p^2q-3pq(2p+q)+3pq(p+q)=3p^2q-6p^2q-3pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^1:&\quad 3pq^2-3pq(p+2q)+3pq(p+q)=3pq^2-3p^2q-6pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^0:&\quad q^3-3pq^2+p^2q+pq^2=q(q^2-2pq+p^2)=q(p-q)^2.
\end{aligned}$$

よって方程式は $az^3 + b = 0$ に帰着し、

$$a = p(p-q)^2, \qquad b = q(p-q)^2.$$

となる。$p \neq q$ なので $(p-q)^2$ で割ってよく、より簡単な形 $pz^3 + q = 0$ が得られる。この置換は、すべての $x \neq p$ に対して $z = \dfrac{x-q}{p-x}$ と逆に解くことができ、また $x = p$ が三次方程式の解となるのは $p(p-q)^2 = 0$ のときに限る。さらに、$z = -1$ が $pz^3 + q = 0$ を満たすことは決してない。そうなるには $p = q$ が必要だからである。したがって、三次方程式の解は $pz^3 + q = 0$ の解とちょうど対応する（$p = 0$ のときは、三次方程式は単に $x^3 = 0$ である）。

小問 (ii)

$x^3 - 3cx + d$ と $x^3 - 3pqx + pq(p+q)$ を比較すると、

$$pq = c, \qquad pq(p+q) = d, \qquad \text{すなわち} \qquad pq = c, \quad p+q = \frac{d}{c},$$

が必要である。ここで $c \neq 0$ なので c で割ってよい。和が $\frac{d}{c}$、積が c である 2 数は

$$t^2 - \frac{d}{c}\,t + c = 0.$$

の解である。この二次方程式が相異なる実数解をもつのは、判別式（discriminant）が正であるとき、かつそのときに限る：

$$\frac{d^2}{c^2} - 4c > 0 \iff d^2 > 4c^3,$$

ここで $c^2 > 0$ を掛けた。よって $d^2 > 4c^3$ のとき、p と q をこの二次方程式の 2 解にとれば、方程式は要求された形に書け、p, q は相異なる実数である。

小問 (iii)

ここでは $c = -2, d = -2$ なので $d^2 = 4 > -32 = 4c^3$ であり、小問 (ii) が適用できる。$p + q = \frac{d}{c} = 1$ かつ $pq = c = -2$ が必要なので、p, q は $t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) = 0$ の解である。$p = 2, q = -1$ ととる。小問 (i) より方程式は

$$2z^3 - 1 = 0, \qquad z^3 = \tfrac{1}{2},$$

となり、その実数解は $z = 2^{-1/3}$ のみである。$u = 2^{1/3}$ とおくと $z = \frac{1}{u}$ である。すると

$$x = \frac{2z-1}{z+1} = \frac{2-u}{1+u}.$$

考えてみよう 分母に立方根が含まれているが、これをもっと整理できないだろうか？

できる。$1+u^3=(1+u)(1-u+u^2)$ を用いて有理化する。$u^3=2$ なので、これは 3 に等しい：

$$x=\frac{(2-u)(1-u+u^2)}{3}=\frac{2-3u+3u^2-u^3}{3}=\frac{3u^2-3u}{3}=u^2-u.$$

よって実数解は

$$x=2^{2/3}-2^{1/3}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}.$$

である。これが唯一の実数解である：x^3+6x-2 の導関数（derivative）は $3x^2+6>0$ なので、狭義単調増加である。z の残り 2 つの値は複素数であり、2 つの複素数解を与える。（代わりに $p=-1, q=2$ を選ぶと $z^3=2$ となり、同じ解が得られる。）

小問 (iv)

$x=p$ のとき $p^3-3p^3+2p^3=0$ となるので $x-p$ は因数であり、

$$x^3-3p^2x+2p^3=(x-p)(x^2+px-2p^2)=(x-p)^2(x+2p).$$

よって解は $x=p$（重解）と $x=-2p$ である。

これは小問 (i) の形で $q=p$ としたものであり、まさに小問 (ii) で除外された場合であることに注意しよう。さて、$c,d\neq 0$ として $d^2=4c^3$ とする。すると $c^3=\frac{1}{4}d^2>0$ なので $c>0$ である。$p^2=c$ かつ $2p^3=d$ となる p を探す。第 2 式を第 1 式で割ると

$$p=\frac{d}{2c},$$

が示唆され、実際これでうまくいく：$p^2=\dfrac{d^2}{4c^2}=\dfrac{4c^3}{4c^2}=c$ であり、さらに $2p^3=2p\cdot p^2=2\cdot\dfrac{d}{2c}\cdot c=d$ である。よって $x^3-3cx+d=x^3-3p^2x+2p^3$ であり、その解は

$$x=\frac{d}{2c}\text{（重解）}\qquad\text{および}\qquad x=-\frac{d}{c}.$$

である。

検算

- 小問 (iii)：$\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\approx 0.32748$ であり、この値における x^3+6x-2 の値は小数第 15 位まで 0 である。カルダノ（Cardano）の公式でも同じ解 $\sqrt[3]{1+3}+\sqrt[3]{1-3}$ が得られる。

- 小問 (iv)：$c = 1, d = 2$ のとき三次方程式は $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ であり、重解 $\frac{d}{2c} = 1$ と単解 $-\frac{d}{c} = -2$ に一致する。
- 小問 (i)：$p = 1, q = 0$ のとき三次方程式は $x^3 = 0$ であり、置換は $x = \frac{z}{z+1}$ を与えるので $x^3(z+1)^3 = z^3$ となり、$a = 1, b = 0$ に一致する。

よくある間違い

- 小問 (ii) で c が負になりうることを忘れる。不等式に c^2 を掛けるのは安全だが、c を掛けるのは安全ではない。
- 小問 (iii) で、$\frac{1}{2}$ の 3 つの立方根をすべて実数解として挙げてしまう。実数なのは $z = 2^{-1/3}$ だけである。
- 小問 (iv) で $p = \sqrt{c}$ ととってしまう。これは $d < 0$ のとき符号が誤りとなる。$p = \frac{d}{2c}$ なら自動的に正しい符号になる。

STEP のその先へ

これは三次方程式に対するカルダノの公式への見事な道筋である。二次方程式 $t^2 - \frac{d}{c}t + c = 0$ が「分解方程式」（resolvent）の役割を果たし、$d^2 - 4c^3$ の符号は（定数倍を除いて）三次方程式の判別式であって、これが実数解が 1 つか 3 つかを決める。三次方程式や四次方程式は累乗根（radicals）で解けるのに、一般の五次方程式が解けないのはなぜか。それを扱うのがガロア理論（Galois theory）である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、これについて読み始めるのに良い一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。