解答例

STEP I 2018、第 6 問

純粋数学 • 中点公式と台形公式

STEP I 2018、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s1-q6

鍵となる考え方

どちらの近似も等間隔の角の正弦の和であり、与えられた積和公式（product-to-sum identity）を使えば、うまく選んだ $2\sin\theta$ を掛けることでこのような和は打ち消し合う和（telescoping sum）になる。中点則（midpoint rule）は $\frac{\pi}{2n}$ の奇数倍で標本をとり、台形公式（trapezium rule）は偶数倍で標本をとるので、$\theta = \frac{\pi}{2n}$ とおけば各小問は打ち消し合う和になる。A_n と B_n を閉じた形で表してしまえば、小問 (iii) は半角の公式（half-angle formulae）を使うだけである。

解答

準備の恒等式

恒等式で $P = \theta$、$Q = (2k-1)\theta$ とおくと

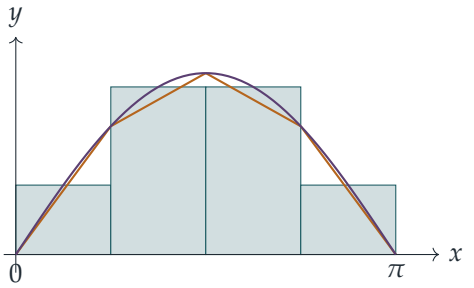
$$2\sin\theta\,\sin(2k-1)\theta = \cos(2k-2)\theta - \cos 2k\theta.$$

$k = 1$ から $k = n$ まで和をとると、ある項で引かれた $\cos 2k\theta$ が次の項で足し戻されるので、和は打ち消し合う：

$$\begin{aligned} 2\sin\theta\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\theta &= (\cos 0 - \cos 2\theta) + (\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \cdots \\ &\quad + (\cos(2n-2)\theta - \cos 2n\theta) \\ &= 1 - \cos 2n\theta, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

以下では、帯の幅を $h = \frac{\pi}{n}$ とし、$\theta = \frac{\pi}{2n} = \frac{h}{2}$ とおく。



$n = 4$ の場合：$\sin x$ は $[0, \pi]$ で上に凸（concave）なので、中点則の長方形（網掛け）は面積を過大に見積もり、台形公式の弦（太線）は過小に見積もる。

小問 (i)

第 k 番目の帯は $(k-1)h$ から kh までであるから、その中点は $x = (k - \frac{1}{2})h = (2k-1)\theta$ にあり、高さは $\sin(2k-1)\theta$ である。したがって

$$A_n = h \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\theta.$$

$2\sin\theta$ を掛けて恒等式を用いると、$2n\theta = \pi$ より

$$2\sin\theta\, A_n = h\,(1 - \cos\pi) = 2h.$$

両辺を 2 で割ると $A_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}$ となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

縦座標（ordinate）は $k = 0, 1, \ldots, n$ に対して $x = kh = 2k\theta$ でとられ、両端の縦座標は $\sin 0 = \sin\pi = 0$ である。よって台形公式により

$$B_n = \frac{h}{2}\left(\sin 0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta + \sin\pi\right) = h \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta.$$

今度は θ の偶数倍なので、恒等式をもう一度、今回は $P = \theta$、$Q = 2k\theta$ として用いる：

$$2\sin\theta\, \sin 2k\theta = \cos(2k-1)\theta - \cos(2k+1)\theta.$$

$k = 1$ から $n-1$ まで和をとると、やはり打ち消し合う：

$$2\sin\theta \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta = \cos\theta - \cos(2n-1)\theta.$$

考えてみよう $\cos(2n-1)\theta$ はどのように簡単にできるか？

$2n\theta = \pi$ より $(2n-1)\theta = \pi - \theta$ であり、$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ である。よって右辺は $2\cos\theta$ となり、

$$2\sin\theta\, B_n = 2h\cos\theta, \qquad \text{すなわち} \qquad B_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

（$n=1$ のときは和が空で $B_1 = 0$ であるが、$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ なのでこの式はやはり成り立つ。）

小問 (iii)

$0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$ より $\sin\theta \neq 0$ であるから、小問 (i) と (ii) より

$$A_n = \frac{h}{\sin\theta}, \qquad B_n = \frac{h\cos\theta}{\sin\theta}.$$

n を $2n$ に置き換えると、h と θ はどちらも半分になる：

$$A_{2n} = \frac{h/2}{\sin(\theta/2)}, \qquad B_{2n} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

一つ目の結果については、$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ と $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を用いて

$$\tfrac{1}{2}(A_n + B_n) = \frac{h}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{h}{2}\cdot\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = B_{2n}.$$

二つ目については、$\sin\theta$ に対する同じ 2 倍角の公式を用いて（また $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$ に注意して）

$$A_n B_{2n} = \frac{h}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\cdot\frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{h^2}{4\sin^2(\theta/2)} = \left(\frac{h/2}{\sin(\theta/2)}\right)^2 = A_{2n}^2.$$

以上で両方の結果が示された。

検算

- $n=1$：幅 π、高さ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ の中点則の長方形が 1 つで $A_1 = \pi$ となり、$\pi/\sin\frac{\pi}{2}$ と一致する。また、前述のとおり $B_1 = 0$ である。
- $n=2$：$A_2 = \frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.2214$、$B_2 = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$ である。このとき $\frac{1}{2}(A_1+B_1) = \frac{\pi}{2} = B_2$ かつ $A_1 B_2 = \frac{\pi^2}{2} = A_2^2$ となる。
- $n=10$：直接和をとると $A_{10} \approx 2.00825$、$B_{10} \approx 1.98352$ となり、真の面積 2 を両側から挟んでいる。$n \to \infty$ のとき $\frac{\pi}{n}\big/\sin\frac{\pi}{2n} \to 2$ かつ $\cos\frac{\pi}{2n} \to 1$ であるから、どちらも当然 2 に収束（converge）する。また、4 つの結果すべてを 200 以下のすべての n についてコンピュータで確認した。

よくある間違い

- 中点を $(k-\frac{1}{2})h$ ではなく kh にとってしまう。こうすると中点則が台形公式の節点での和になってしまう。
- 台形公式では両端の縦座標を半分にすることを忘れる。ここではそれらが 0 になるので、B_n は単に内部の縦座標の和の h 倍になる。
- $(2n-1)\theta = \pi - \theta$ を使わず、$\cos(2n-1)\theta$ を簡単にしないまま放置する。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、B_{2n} が A_n と B_n の相加平均（arithmetic mean）であり、A_{2n} が A_n と B_{2n} の相乗平均（geometric mean）であることを述べている。逆数をとると、これは円に外接する多角形と内接する多角形で π を挟み込むアルキメデス（Archimedes）の方法に現れる、調和平均（harmonic mean）をとってから相乗平均をとるという形になり、この反復は Borchardt のアルゴリズムとして知られている。より一般に、中点則と台形公式の誤差を比較すると（中点則の誤差はおよそ台形公式の誤差の半分で、符号が逆である）、シンプソン（Simpson）の公式やリチャードソン補外（Richardson extrapolation）が導かれる。これらは数値解析（numerical analysis）の中心的な考え方である。これらの公式の背後にある誤差解析については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）のリーマン積分（Riemann integral）の章を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。