解答例

STEP I 2018、第 5 問

純粋数学 • 多項式と因数定理

> **STEP I 2018、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q5

鍵となる考え方

「これらの点で値 1 をとる」というのは、実は根（root）についての主張である。$P(k) = 1$ ならば k は $P(x) - 1$ の根であり、したがって $x - k$ はその因数（factor）である。共通の値を引いて因数分解（factorise）してしまえば、この問題のどの小問も易しくなる。小問 (iii) では、この因数分解によって S に関する問いが、小さな数を 4 つの**相異なる**整数の積として表す問題に変わる。そして、相異なるという条件こそがすべての仕事をするのである。

解答

小問 (i)

剰余の定理（remainder theorem）により、$P(x)$ を $x - k$ で割った余りは $P(k)$ である。したがって $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 1$、すなわち $1, 2, 3, 4$ が $P(x) - 1$ の根であることが必要である。$P(x) - 1$ の次数（degree）は高々 4 で、これら 4 つの相異なる根をもつから、$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ の定数倍である。よって、このような多項式のうち最も一般的なものは

$$P(x) = 1 + k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4), \qquad k \neq 0,$$

である。ここで、次数がちょうど 4 となるためには $k \neq 0$ が必要である。

小問 (ii)

小問 (i) とまったく同様に、$1, 2, \ldots, N$ は $P(x)-1$ の N 個の相異なる根であり、その次数は N である（$N \geq 1$ なので、1 を引いても次数は変わらない）。したがって、ある定数 k について

$$P(x)-1 = k(x-1)(x-2)\cdots(x-N)$$

が成り立ち、P の次数は $N \geq 1$ なので $k \neq 0$ である。すると

$$P(N+1)-1 = k \cdot N(N-1)\cdots 1 = k\,N! \neq 0,$$

となる。k と $N!$ はともに 0 でないからである。ゆえに $P(N+1) \neq 1$ である。

$P(N+1) = 2$ ならば $k\,N! = 1$ であるから、$k = \frac{1}{N!}$ である。正の整数 r に対して

$$\begin{aligned} P(N+r) &= 1 + \frac{(N+r-1)(N+r-2)\cdots r}{N!} \\ &= 1 + \frac{(N+r-1)!}{(r-1)!\,N!} = 1 + \binom{N+r-1}{N}. \end{aligned}$$

（この積は N 個の因数からなり、$N+r-1$ から r まで順に下がっていく。）

ここで、すべての N に対して $1 + \binom{N+r-1}{N} = N+r$ となるようにしたい。小さな r で試してみよう。$r=1$ とすると $P(N+1) = 2$ となり、これが $N+1$ に等しいのは $N=1$ のときに限る。$r=2$ とすると

$$P(N+2) = 1 + \binom{N+1}{N} = 1 + (N+1) = N+2,$$

となるので、N が何であっても $r=2$ でうまくいく。

小問 (iii)

4 つの相異なる整数 a, b, c, d は $S(x) - 2001$ の根であり、これは次数 4、最高次の係数（leading coefficient）1 の多項式である。したがって

$$S(x) = 2001 + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

(a) ある整数 e に対して $S(e) = 2018$ であると仮定する。すると

$$(e-a)(e-b)(e-c)(e-d) = 17.$$

4 つの因数はいずれも整数であり、a, b, c, d が相異なるのでこれらも相異なる。また積が 0 でないから、どの因数も 0 ではない。

考えてみよう 相異なる 4 つの整数の積が素数にならないのは、どのような理由によるのか？

相異なる 0 でない整数のうち、絶対値（absolute value）が 1 であるものは高々 2 つ（すなわち 1 と -1）しかない。したがって 4 つの因数のうち少なくとも 2 つは絶対値が 2 以上であり、その 2 つの積の絶対値は 4 以上である。ところがその積は 17 を割り切るので、± 17 でなければならない。しかし 17 は素数（prime）なので、絶対値がそれぞれ 2 以上である 2 つの整数の積として表すことはできない。この矛盾により、$S(e) = 2018$ となる整数 e は存在しないことが示された。

(b) ここで $S(0) = 2001 + (-a)(-b)(-c)(-d) = 2001 + abcd$ であるから、$S(0) = 2017$ となるのは次の場合であり、かつその場合に限る：

$$abcd = 16.$$

逆に、$abcd = 16$ を満たす相異なる 4 つの整数はどれも条件を満たす S を与える（上の式はモニック（monic）で整数係数である）。したがって、積が 16 となる相異なる 4 つの整数の集合 $\{a, b, c, d\}$ の個数を数えればよい。各集合は、ちょうど 1 通りの仕方で小さい順に並べられる。

a, b, c, d はいずれも 16 を割り切るので、その絶対値は $1, 2, 4, 8, 16$ のいずれかであり、4 つの絶対値の積は 16 である。整数が相異なるので、同じ絶対値は高々 2 回（$\pm m$ として）しか現れない。絶対値を累乗 2^p の形に書き、4 つの指数の和が 4 で、同じ指数を 3 回以上使わないものとすると、可能性は

$$\{1, 1, 2, 8\}, \qquad \{1, 1, 4, 4\}, \qquad \{1, 2, 2, 4\}.$$

である（16 を使うと残りの 3 つは $1, 1, 1$ とならざるをえず、これは許されない。また $\{2, 2, 2, 2\}$ は 2 を 4 回使っている）。次に、積が $+16$ となるように符号を選ぶ：

- $\{1, 1, 2, 8\}$：対は $1, -1$ であり、これが -1 を寄与するので、$2, 8$ のうちちょうど一方が負である。これにより $\{-2, -1, 1, 8\}$ と $\{-8, -1, 1, 2\}$ を得る。
- $\{1, 1, 4, 4\}$：2 つの対はいずれも $\pm$ の組で、$(1)(-1)(4)(-4) = 16$ となる。これにより $\{-4, -1, 1, 4\}$ を得る。
- $\{1, 2, 2, 4\}$：対 $2, -2$ が -4 を寄与するので、$1, 4$ のうちちょうど一方が負である。これにより $\{-4, -2, 1, 2\}$ と $\{-2, -1, 2, 4\}$ を得る。

よって、$a < b < c < d$ の選び方は **5** 通りである。

検算

- 小問 (ii) で $N = 1$ のとき $P(x) = x$ であるから、$P(N + r) = 1 + r$ は $1 + \binom{r}{1}$ と一致し、$P(3) = 3$ となる。$N = 2$ のとき $P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$ から $P(4) = 4$ が得られ、$r = 2$ についての主張どおりである。
- (iii)(b) については、5 つの集合それぞれの積を実際に計算してみるとよい。たとえば $(-2)(-1)(2)(4) = 16$ である。$[-16, 16]$ の範囲の相異なる整数の 4 つ組をすべてコンピュータで探索すると、ちょうどこの 5 つが見つかる。
- (iii)(a) については、$2018 - 2001 = 17$ が素数であることに注意せよ。2001 を別の値に置き換えて、差が $4 = (-2)(-1)(1)(2)$ のようになる場合には、そのような e が存在しうる。したがって、素数であることが本当に効いているのである。

よくある間違い

- 小問 (i) で $k \neq 0$ を忘れる、あるいは $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1$ だけを答えてしまう。これは最も一般的な多項式ではない。
- 小問 (iii)(b) で正の約数（divisor）だけを数えてしまう、あるいは 1 と -1 を両方使えることを見落とす。
- $S(0) = 2001 - abcd$ と書いてしまう。負号は 4 つあるので、積は $+abcd$ である。

STEP のその先へ

次数 N の多項式は $N + 1$ 個の点での値によって決まるという考え方は、ラグランジュ（Lagrange）補間（Lagrange interpolation）や差分（finite differences）の基礎にある。小問 (ii) の多項式は、実は $1 + \binom{x-1}{N}$ が姿を変えたものである。小問 (iii) は、整数論（number theory）における標準的な道具の小さな例である。すなわち、P が整数係数ならば $m - n$ は $P(m) - P(n)$ を割り切り、このことが多項式が整数点でとりうる値を強く制限するのである。この種の整除性の議論についてさらに学ぶには、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。