解答例

STEP I 2018、第 4 問

純粋数学 ・ 積分で定義された関数のグラフの概形

> **STEP I 2018、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q4

鍵となる考え方

f はすべて $\ln x$ から組み立てられており、扱いにくい因子 $\frac{1}{x}$ はちょうど $\ln x$ の導関数である。したがって置換（substitution）$u = \ln x$ によって、積分は u の簡単な有理関数（rational function）の積分に変わる。u で表すと、x を x^{-1} に置き換えることは u の符号を変えることにすぎないので、対称性は答えが u の偶関数（even function）であることに帰着する。

解答

以下を通して $u = \ln x$ と書く。$x \neq 1$ より $u \neq 0$ であり、$u > 0$ となるのはちょうど $x > 1$ のときである。

f と f′ の零点

次のようにおく。

$$g(u) = \frac{(1-u^2)^2}{u} = \frac{1}{u} - 2u + u^3, \qquad \text{このとき} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{g(\ln x)}{x}.$$

$(\ln x)^2 = 1$ のとき、因子 $(1-u^2)^2$ は 0 となるので、$\mathrm{f}(x) = 0$ である。商の微分法（quotient rule）と合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{g'(u) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - g(u)}{x^2} = \frac{g'(u) - g(u)}{x^2}.$$

すでに $g(\pm 1) = 0$ がわかっている。さらに、$(1-u^2)^2 = (1-u)^2(1+u)^2$ は $u = \pm 1$ に重複した因数（repeated factor）をもつので、その導関数 $-4u(1-u^2)$ もそこで 0 とな

り、したがって

$$g'(u) = \frac{-4u(1-u^2)\cdot u - (1-u^2)^2}{u^2} = 0 \quad \text{ただし} u = \pm 1.$$

ゆえに、$(\ln x)^2 = 1$ のとき、すなわち $x = e$ および $x = e^{-1}$ において、$\mathrm{f}'(x) = 0$ も成り立つ。

小問 (i)

$u = \ln t$ と置換すると、$\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ である。よって

$$\int \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1-u^2)^2}{u}\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right)\mathrm{d}u = \ln|u| - u^2 + \tfrac{1}{4}u^4 + C.$$

$G(u) = \ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4$ と定める。F の二つの部分のいずれにおいても積分範囲が $t = 1$ をまたぐことはないので、それぞれの上で u は一定の符号を保ち、この原始関数（antiderivative）はそこで有効である。

$x > 1$ のとき、下端 $t = e$ は $u = 1$ を与え、$G(1) = 0 - 1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ である。$0 < x < 1$ のとき、下端 $t = e^{-1}$ は $u = -1$ を与え、やはり $G(-1) = -\frac{3}{4}$ である。したがって、どちらの場合も同じ式が得られる。

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \ln|\ln x| - (\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} \qquad (x > 0,\ x \neq 1).}$$

ここで $\ln(x^{-1}) = -\ln x$ である。上の式に現れる $\ln x$ はすべて $|\cdot|$ の中にあるか偶数乗されているので、

$$\mathrm{F}(x^{-1}) = \ln|-\ln x| - (-\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(-\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} = \mathrm{F}(x),$$

となり、示すべきことが示された。（定数 $\frac{3}{4}$ が両辺で一致するのは、二つの下端 e と e^{-1} 自体が互いに逆数の組になっているからにほかならない。）

小問 (ii)

考えてみよう F はどこで増加しているか。また、$x = 1$ の近くでは何が起こるか。

傾き。 $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$ である。因子 $(1-u^2)^2$ は決して負にならず、$x > 0$ であるから、$\mathrm{f}(x)$ の符号は $u = \ln x$ の符号と一致する。よって F は $(0,1)$ で減少し、$(1,\infty)$ で増加する。停留点（stationary point）は $x = e^{-1}$ と $x = e$ のみであり、そこでは定義により $\mathrm{F} = 0$ である。

これらは極値点（turning point）ではない。$x = e$ の近くでは傾きは両側とも正であり、$x = e^{-1}$ の近くでは両側とも負である。そこでは $\mathrm{f}' = \mathrm{F}''$ も 0 であるから、これら

は**停留変曲点**（stationary point of inflection）である。したがって次が成り立つ。

$\mathrm{F}(x) > 0$ となるのは$0 < x < e^{-1}$ および$x > e$, $\mathrm{F}(x) < 0$ となるのは$e^{-1} < x < 1$ および$1 < x < e$

端での振る舞い。

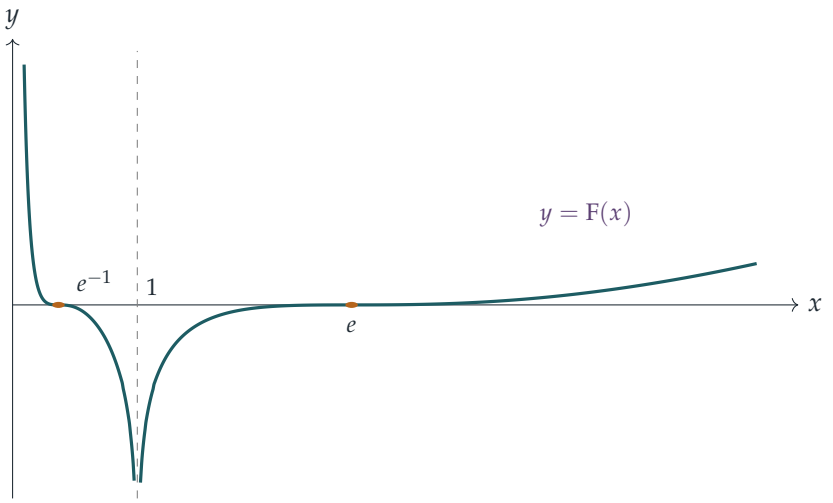
- $x \to 1$ のとき、$u \to 0$ であり $\ln|u| \to -\infty$ となる一方、他の項は $\frac{3}{4}$ に近づく。よって両側から $\mathrm{F}(x) \to -\infty$ となり、$x = 1$ は垂直漸近線（vertical asymptote）である。
- $x \to \infty$ のとき、$u \to \infty$ であり $\frac{1}{4}u^4$ の項が支配的になるので、$\mathrm{F}(x) \to \infty$ となる。ただしその増え方は非常にゆるやかである。実際、傾きは $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to 0$ となる。
- $x \to 0^+$ のとき、$u \to -\infty$ であるから、対称性によりやはり $\mathrm{F}(x) \to \infty$ となる。こちらでは急激に増大する。実際、傾きは $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to -\infty$ となる。曲線は y 軸とは交わらない。

凹凸（concavity）（より丁寧な概形のために）。 $\mathrm{F}'' = \mathrm{f}' = (g' - g)/x^2$ を用いて整理すると、

$$\mathrm{F}''(x) = -\frac{(u^2-1)(u^3-3u^2-u-1)}{u^2x^2}.$$

3 次式 $u^3 - 3u^2 - u - 1$ は実根を一つだけもち、それは $u \approx 3.38$ である（$u = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ における極大値が負であるため）。それより小さいすべての u に対してこの 3 次式は負である。よって曲線は $(0, e^{-1})$ で下に凸（concave up）、$(e^{-1}, 1)$ および $(1, e)$ で上に凸（concave down）である。e から $x \approx 29.5$ にあるもう一つの変曲点までは下に凸であり、その先は上に凸となる。この最後の変曲点ははるか右方にあるので、概形に描く必要はない。

対称性 $\mathrm{F}(x^{-1}) = \mathrm{F}(x)$ は、x における高さが $1/x$ における高さと一致することを意味する。たとえば $\mathrm{F}(2) = \mathrm{F}(\frac{1}{2}) \approx -0.04$、$\mathrm{F}(5) = \mathrm{F}(\frac{1}{5}) \approx 0.31$ である。したがって、曲線の $(1, \infty)$ 上の部分は、$(0, 1)$ 上の部分を漸近線に向かって水平方向に押しつぶしたものになっている。



曲線は y 軸の近くで $+\infty$ から急激に下りてくる。次第に平らになって $(e^{-1}, 0)$ の停留変曲点で x 軸に接し、その後、漸近線 $x = 1$ で $-\infty$ へと急降下する。右側では $-\infty$ から再び上昇し、$(e, 0)$ にある二つ目の停留変曲点で平らになり、その後ゆるやかに $+\infty$ へと増加していく。

検算

- 枠で囲んだ式を微分すると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right) = \mathrm{f}(x)$ となり、またこの式は $x = e$ と $x = e^{-1}$ において 0 を与える。
- 数値的には $\int_e^5 \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$、$\int_{1/e}^{1/5} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$ であり、式とも対称性とも合っている。
- 符号も整合している。$(1, e)$ 上で関数は 0 まで増加するので、そこでは負でなければならず、実際 $\mathrm{F}(2) \approx -0.039$ である。

よくある間違い

- $\ln x < 0$ となる $0 < x < 1$ に対して $\ln(\ln x)$ と書いてしまうこと。$\frac{1}{u}$ の原始関数は $\ln|u|$ であり、まさにこの絶対値が対称性を成り立たせている。
- $x = e^{\pm 1}$ に極値点を描いてしまうこと。f は 2 乗の因子をもつので、そこで符号を変えない。したがってこれらは停留変曲点である。
- $x = 1$ の垂直漸近線を見落とすこと、あるいはそれをまたいで二つの枝をつないでしまうこと。

STEP のその先へ

F は積分によって定義されており、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）によれば、f が連続である各区間上で $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$ が成り立つ。二つの部分に別々の基点が必要なのはこのためである。f は $x = 1$ で発散するので、そこをまたいで一つの積分をとることはできない。対称性 $x \mapsto x^{-1}$ は、$u = \ln x$ のもとで $u \mapsto -u$ となる。これは乗法的な対称性を加法的な対称性に変換する小さな例であり、この考え方は解析学全体を貫いている。微分積分学の基本定理と広義積分（improper integral）についての丁寧な解説としては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。