解答例

STEP I 2018、第 3 問

純粋数学 ・ 角と双曲線

STEP I 2018、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s1-q3

鍵となる考え方

2 つの角はどちらも、その正接（tangent）を通じて P の座標と結びついている。RP の傾きが $\tan\alpha$ を与え、SP の傾きが $\tan\beta$ を与える。すると条件 $\beta = 2\alpha$ は tan の倍角公式（double-angle formula）に帰着し、分母を払えば曲線の方程式が得られる。小問 (ii) では同じ計算を逆にたどる。ただし落とし穴がある。$\tan\beta = \tan 2\alpha$ がわかっても、β は π の整数倍の差を除いてしか定まらない。そのため、2α がどの象限（quadrant）にあるかを追跡しなければならない。

解答

角の設定

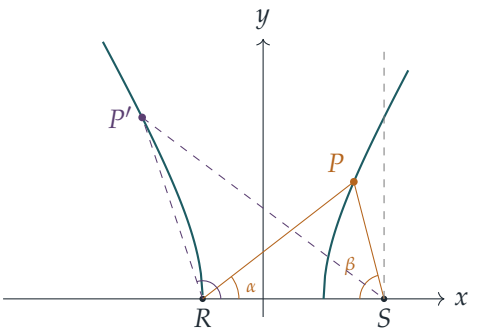
$y > 0$ であるから、R における角 α は x 軸の正の向き（RS に沿う向き）から RP まで測った角であり、$0 < \alpha < \pi$ である。そして

$$\tan\alpha = \frac{y}{x+a} \qquad (x \neq -a).$$

これは P が R の右側にある場合（α は鋭角で正接は正）でも、左側にある場合（α は鈍角で正接は負）でも成り立つ。S における角 β は、x 軸の負の向き（SR に沿う向き）から SP まで測った角である。$x < 2a$ より点 P は S の左側にあるので、β は鋭角であり、

$$\tan\beta = \frac{y}{2a-x} > 0, \qquad 0 < \beta < \tfrac{\pi}{2}.$$

$x \neq -a$ のとき $t = \tan\alpha$ とおく。



$y>0$、$x<2a$ の範囲にある曲線 $y^2=3(x^2-a^2)$（図は $a=1$ の場合）は2つの部分からなる。右側の枝のうち $a<x<2a$ の弧と、左側の枝の上半分 $x<-a$ 全体である。左側の枝上の点 P' では α は鈍角になる。

小問 (i)

$\beta=2\alpha$ と仮定する。$\beta<\frac{\pi}{2}$ より $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ であるから、$x>-a$、$0<t<1$ であり、$1-t^2\neq 0$ なので倍角公式が使える：

$$\frac{y}{2a-x}=\tan 2\alpha=\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2y/(x+a)}{1-y^2/(x+a)^2}=\frac{2y(x+a)}{(x+a)^2-y^2}.$$

y で割り（$y>0$ なので許される）、分母を払うと

$$\begin{aligned}&(x+a)^2-y^2=2(x+a)(2a-x)\\ \iff\quad &y^2=(x+a)\big[(x+a)-2(2a-x)\big]=(x+a)(3x-3a)=3(x^2-a^2).\end{aligned}$$

よって、求めるとおり P は $y^2=3(x^2-a^2)$ 上にある。

小問 (ii)

今度は P が曲線上にあり、$y>0$ かつ $x<2a$ であると仮定する。このとき $x^2-a^2=\frac{1}{3}y^2>0$ であるから $|x|>a$、すなわち $a<x<2a$ または $x<-a$ である。特に $x\neq -a$ なので $t=\tan\alpha$ は定義され、さらに $t\neq 0$ である。

小問 (i) の手順は逆にたどれる。曲線の方程式は $(x+a)^2-y^2=2(x+a)(2a-x)$ と同値である。両辺を $(x+a)^2$ で割り、$2a-x=y/\tan\beta$ を用いると

$$1-t^2=\frac{2(2a-x)}{x+a}=\frac{2y}{(x+a)\tan\beta}=\frac{2t}{\tan\beta},\qquad \text{よって}\qquad (1-t^2)\tan\beta=2t.$$

もし $t^2=1$ ならば $t=0$ となり矛盾する。したがって $t^2\neq 1$ であり、

$$\tan\beta=\frac{2t}{1-t^2}=\tan 2\alpha.$$

考えてみよう $\tan\beta = \tan 2\alpha$ ならば $\beta = 2\alpha$ といえるだろうか？

必ずしもそうではない。いえるのは、β と 2α の差が π の整数倍であるということだけである。そこで角の大きさについてわかっていることを用い、曲線の 2 つの部分に分けて考える。

$a < x < 2a$ の場合。 このとき $x + a > 0$ なので $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$、したがって $0 < 2\alpha < \pi$ である。$\tan 2\alpha = \tan\beta > 0$ より、2α は β と同じ区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ にある。tan は $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で一対一（one-to-one）であるから、

$$\beta = 2\alpha.$$

$x < -a$ の場合。 このとき $x + a < 0$ なので $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$、したがって $\pi < 2\alpha < 2\pi$ である。$\tan 2\alpha > 0$ より $2\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ であるから、$2\alpha - \pi \in (0, \frac{\pi}{2})$ かつ $\tan(2\alpha - \pi) = \tan 2\alpha = \tan\beta$ である。先ほどと同様に tan は $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で一対一であるから、

$$\beta = 2\alpha - \pi.$$

以上より、考えられる関係は $\beta = 2\alpha$（P が右側の枝にあるとき）と $\beta = 2\alpha - \pi$（P が左側の枝にあるとき）である。各部分のすべての点が条件を満たすので、どちらの関係も実際に起こる。

検算

- $a = 1$、$P = (-2, 3)$ とする。$3(4 - 1) = 9$ なので、この点は曲線上にある。このとき $\tan\alpha = 3/(-1) = -3$ より $\alpha \approx 108.43°$、$\tan\beta = \frac{3}{4}$ より $\beta \approx 36.87°$ である。確かに $2\alpha - 180° \approx 36.87°$ となる。
- 右側の枝上で $x \to 2a$ とすると $y \to 3a$ となるので、$\tan\alpha \to 1$、$\tan\beta \to \infty$ である。すなわち $\alpha \to \frac{\pi}{4}$、$\beta \to \frac{\pi}{2} = 2\alpha$ となる。
- 左側の枝の遠方では、P は漸近線（asymptote）$y = -\sqrt{3}\,x$ に近づくので、$\alpha \to \frac{2\pi}{3}$、$\beta \to \frac{\pi}{3} = 2\alpha - \pi$ となる。

ランダムな a に対し、各枝上の多数のランダムな点で両方の関係をコンピュータで確認したところ、これも一致した。

よくある間違い

- $\tan\alpha = y/|x + a|$ と書いてしまうこと、あるいは α が鋭角であると思い込むこと。左側の枝では α は鈍角であり、$\tan\alpha < 0$ である。

- 角の範囲を確かめずに、$\tan\beta = \tan 2\alpha$ から $\beta = 2\alpha$ と結論してしまうこと。これでは 2 つ目の関係を見落とす。
- $x < 2a$ と $y > 0$ によって曲線が 2 つの部分に限られること、また $x = -a$ を除外するのに $|x| > a$ が必要であることを忘れること。

STEP のその先へ

この曲線は、離心率（eccentricity）2、焦点（focus）S、準線（directrix）$x = \frac{a}{2}$ の双曲線（hyperbola）である。小問 (i) の性質は、双曲線を用いて角を三等分（trisect）する古典的な方法（パップス（Pappus）が知っていた）を与える。これは、定規とコンパスだけでは角の三等分が不可能であるという事実をうまく回避するものである。この不可能性の証明そのものは、体論（field theory）の最初の講義の見どころの一つである。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がこれを扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（ビジュアル複素解析）は、角と円錐曲線の幾何についてのすばらしい副読本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。