解答例

STEP I 2018、第 2 問

純粋数学 • 対数の不等式

> **STEP I 2018、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q2

鍵となる考え方

すべての土台は底の変換公式(change-of-base rule)である。任意の底の対数(logarithm)は共通の底による対数の比として表せ、さらに $\frac{1}{\log_b c} = \log_c b$ が成り立つ。すべての対数を ln で書き直してしまえば、各小問は不等式（inequality）を扱う短い代数計算になる。$e^2 < 8$ のような与えられた事実は、$\ln 2$ や $\ln 10$ の評価を姿を変えて述べたものにすぎない。その間ずっと、ln が増加関数（increasing function）であること、したがって正の数どうしの不等式は両辺の対数をとっても向きが変わらないことを用いる。

解答

最初の結果

対数の定義により、$x = \log_b c$ とは

$$c = b^x.$$

を意味する。両辺の底 a の対数をとり、$\log_a(b^x) = x \log_a b$ を用いると、

$$\log_a c = x \log_a b.$$

ここで $b \neq 1$（$\log_b$ が意味をもつため）であるから $\log_a b \neq 0$ であり、両辺を割ることができる：

$$\frac{\log_a c}{\log_a b} = x = \log_b c,$$

これが示すべきことであった。以下ではこの結果から得られる二つの帰結を用いる。$a = c$ とおくと $\log_b c = \dfrac{1}{\log_c b}$ が得られ、$a = \mathrm{e}$ とおくと $\log_b c = \dfrac{\ln c}{\ln b}$ が得られる。

小問 (i)

逆数の公式により、$\dfrac{1}{\log_2 \pi} = \log_\pi 2$ かつ $\dfrac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 5$ である。よって

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10.$$

$\pi > 1$ であるから関数 $\log_\pi$ は増加関数であり、$10 > \pi^2$ から

$$\log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2,$$

が得られる。これが求める不等式である。

小問 (ii)

与えられた最初の事実を自然対数（natural logarithm）で書き直す：

$$\log_2 \frac{\pi}{e} = \frac{\ln \pi - 1}{\ln 2} > \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \ln \pi > 1 + \frac{\ln 2}{5},$$

ここでは $\ln 2 > 0$ を掛けたので、不等式の向きは変わらない。

考えてみよう $e^2 < 8$ は何を伝えているのだろうか？

これは $\ln 2$ の下界（lower bound）である。両辺の ln をとると（ln は増加関数なので許される）$2 < \ln 8 = 3 \ln 2$ となり、$\ln 2 > \frac{2}{3}$ を得る。これを代入すると、

$$\ln \pi > 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{15} = \frac{17}{15},$$

となり、示すべきことが得られた。

小問 (iii)

$\pi^2 < 10$ の対数をとると $2 \ln \pi < \ln 10$ となる。したがって $\ln 10 < \frac{30}{13}$ を示せば十分である。

残りの二つの事実を書き直す。$e^3 > 20$ であるから $3 > \ln 20 = \ln 2 + \ln 10$、すなわち

$$\ln 2 < 3 - \ln 10.$$

また $\log_{10} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 10} > \dfrac{3}{10}$ であり、$\ln 10 > 0$ であるから

$$\ln 10 < \frac{10}{3} \ln 2.$$

前者は $\ln 2$ の上界（upper bound）であり、後者では $\ln 2$ が正の係数で現れるので、代入してよい：

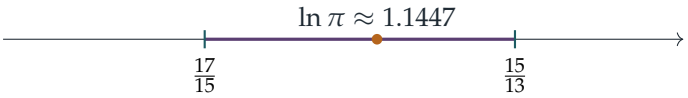
$$\ln 10 < \frac{10}{3} (3 - \ln 10) = 10 - \frac{10}{3} \ln 10.$$

$\ln 10$ の項をまとめると $\frac{13}{3}\ln 10 < 10$ となり、$\ln 10 < \frac{30}{13}$ を得る。したがって

$$\ln \pi < \tfrac{1}{2}\ln 10 < \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{30}{13} = \frac{15}{13},$$

となり、示すべきことが得られた。

小問 (ii) と (iii) を合わせると、$\ln \pi$ は狭い区間（interval）に閉じ込められる：



検算

数値的には $\ln \pi \approx 1.1447$ であり、確かに $\frac{17}{15} \approx 1.1333$ と $\frac{15}{13} \approx 1.1538$ の間にある。小問 (i) では $\log_\pi 10 \approx 2.0115$ で、2 をわずかに上回るだけである。これは $\pi^2 \approx 9.87$ が 10 にきわめて近いことと合っている。評価 $\ln 10 < \frac{30}{13} \approx 2.3077$ も $\ln 10 \approx 2.3026$ と照らして正しい。与えられた事実も確かめておくとよい：$\log_2(\pi/\mathrm{e}) \approx 0.209$、$\mathrm{e}^2 \approx 7.39$、$\mathrm{e}^3 \approx 20.09$、$\log_{10} 2 \approx 0.3010$ である。

よくある間違い

- $\dfrac{1}{\log_2 \pi}$ を $\log_2 \frac{1}{\pi}$ と書いてしまうこと。逆数をとると底と真数（argument）が入れ替わるのであって、真数が逆数になるのではない。
- 小問 (iii) で、上界が必要なところに $\ln 2$ の下界を使ってしまうこと。不等式をつなげられるのは、それぞれの評価が同じ向きを向いているときだけである。
- 不等式の両辺に掛けたり対数をとったりする前に、$\ln 2$、$\ln 10$、$\log_\pi$ が都合のよい性質（正である、あるいは増加関数である）をもつことを述べ忘れること。

STEP のその先へ

わずかな粗い事実から数値の評価を証明することは、解析学者が定数を見積もる方法の小さな味見である。解析学（analysis）の多くは、未知の量を自分で制御できる二つの評価の間に閉じ込めることからなる。$\ln 2$ や π のより精密な評価は、級数（series）や積分の不等式から得られる。たとえば $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ を長方形で見積もる方法がある。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、このような考え方への親しみやすい入門である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。