解答例

STEP I 2018、第 13 問

確率・統計 ・ 二項分布とベイズの定理

> **STEP I 2018、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q13

鍵となる考え方

すべては一つの数え上げに帰着する。受験者が k 問に解答し、そのうち j 問に正解すれば、得点は $2j-(k-j)=3j-k$ である。したがって合格するとは少なくとも $(k+5)/3$ 問に正解することであり、これにより各 k について、どの二項分布の項を足し合わせればよいかが正確にわかる。小問 (iii) では、各問題に三つの結果（正解、不正解、未解答）があると考えるのがうまいやり方で、これにより問題はただ一つの多項的な数え上げ（multinomial count）に帰着する。

解答

以下を通して、無作為に選んだ解答が正しい確率（probability）を $p=\frac{1}{n}$ とし、$q=1-p$ とおく。$n\geq 2$ であるから、$0<p\leq\frac{1}{2}$ である。

小問 (i)

A がちょうど k 問に解答するときに合格する確率を P_k とする。各解答の選択は独立（independent）であるから、正解数 J は二項分布（binomial distribution）$\mathrm{B}(k,p)$ に従う。得点は $3J-k$ であるから、合格するのは

$$3J-k\geq 5 \iff J\geq\frac{k+5}{3}.$$

のときであり、かつそのときに限る。k の値を順に調べる。

- $k=0,1,2$：それぞれ $J\geq\frac{5}{3},2,\frac{7}{3}$、すなわち $J\geq 2$、$J\geq 2$、$J\geq 3$ が必要であるが、$J\leq k$ であるからこれらは不可能である（最高得点は $2k\leq 4$）。よって $P_0=P_1=P_2=0$ である。

- $k=3$：$J \geq \frac{8}{3}$、すなわち $J=3$ が必要であり、$P_3 = p^3$ である。
- $k=4$：$J \geq 3$ が必要であるから、

$$P_4 = \binom{4}{3} p^3 q + p^4 = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p).$$

- $k=5$：$J \geq \frac{10}{3}$、すなわち $J=4$ または 5 が必要であるから、

$$P_5 = \binom{5}{4} p^4 q + p^5 = 5p^4(1-p) + p^5 = p^4(5-4p).$$

次に P_4 を二つの対抗馬と比較する。$p<1$ より $4-3p>1$ であるから、$P_4 > p^3 = P_3$ である。また、

$$P_4 - P_5 = p^3\left[(4-3p) - p(5-4p)\right] = p^3\left(4p^2-8p+4\right) = 4p^3(1-p)^2 > 0,$$

である。これは $0<p<1$ による。さらに $P_4>0$ は $P_0 = P_1 = P_2 = 0$ よりも大きいから、P_4 が真に最大であり、A は $k=4$ を選ぶべきである。これが示すべきことであった。

考えてみよう 5 問すべてに解答すれば、得点の機会は必ず増えるのではないか？

この場合はそうではない。5 問に解答すると 4 問の正解が必要になる。5 問目の解答は不正解のたびに 1 点を失い、しかも正解よりも不正解になることの方がはるかに多いからである。4 問に解答すれば、3 問正解で十分である。因数分解 $4p^3(1-p)^2$ は、大きな n に限らず、すべての $n \geq 2$ についてこの優位性を示している。

小問 (ii)

B が解答する問題数を K とすると、$k=0,\ldots,5$ に対して $\mathrm{P}(K=k) = \frac{1}{6}$ である。また B が合格するという事象を S とする。$K=k$ という条件のもとでは、B はまさに A と同じ立場にあるから、$\mathrm{P}(S \mid K=k) = P_k$ である。ベイズの定理（Bayes' theorem）により、

$$\mathrm{P}(K=4 \mid S) = \frac{\frac{1}{6}P_4}{\frac{1}{6}(P_0+P_1+\cdots+P_5)} = \frac{p^3(4-3p)}{p^3+p^3(4-3p)+p^4(5-4p)}.$$

p^3（これは 0 でない）で約分すると、分母は $1+4-3p+5p-4p^2 = 5+2p-4p^2$ となるから、

$$\mathrm{P}(K=4 \mid S) = \frac{4-3p}{5+2p-4p^2}.$$

$p = \frac{1}{n}$ を代入し、分子と分母に n^2 を掛けると、

$$\mathrm{P}(K=4 \mid S) = \frac{4n^2-3n}{5n^2+2n-4} = \frac{n(4n-3)}{5n^2+2n-4}.$$

小問 (iii)

各問題について、C の硬貨投げと解答の選択は互いに独立であり、また他の問題で起こることとも独立である。したがって各問題は独立に、次の三つの結果のいずれかをとる。

$$\begin{aligned} \text{正解 } (+2): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}, \\ \text{不正解 } (-1): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{n+1}, \\ \text{未解答 } (0): &\quad \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

C が c 問に正解し、w 問で不正解になったとする ($c+w\le 5$)。合格するのは $2c-w\ge 5$ のときである。このとき $c\ge 3$ でなければならず、さらに次のようになる。

- $c=3$：$w\le 1$ が必要である。
- $c=4$：$c+w\le 5$ であるから、$w\le 1$ は自動的に成り立つ。
- $c=5$：$w=0$ である。

c 問の正解、w 問の不正解、$5-c-w$ 問の未解答を割り当てる方法の数は、多項係数 (multinomial coefficient) $\frac{5!}{c!\,w!\,(5-c-w)!}$ である。正解と未解答は同じ確率 $\frac{1}{n+1}$ をもつから、各並べ方の確率は $\dfrac{(n-1)^w}{(n+1)^5}$ である。五つの場合を足し合わせる。

(c,w)	並べ方の数	確率 $\times(n+1)^5$
$(3,0)$	10	10
$(3,1)$	20	$20(n-1)$
$(4,0)$	5	5
$(4,1)$	5	$5(n-1)$
$(5,0)$	1	1

合計は $16+25(n-1)=25n-9$ であるから、

$$\mathrm{P}(\text{C が合格})=\frac{25n-9}{(n+1)^5}.$$

検算

- $n=2$ のとき：$P_3=\frac{1}{8}$、$P_4=\frac{5}{16}$、$P_5=\frac{3}{16}$ であるから、$k=4$ が最もよい。(ii) では公式から $\frac{2\cdot 5}{20}=\frac{1}{2}$ が得られ、直接計算した $\frac{5/16}{10/16}$ と一致する。

- (iii) で $n = 3$ のとき、答えは $\frac{66}{1024} \approx 0.0645$ であり、200 000 回の試験をコンピュータでシミュレーションしたところ 0.0644 となった。また三つの公式はいずれも、$n = 2, \ldots, 29$ についてコンピュータによる厳密な数え上げと一致する。
- $n \to \infty$ のとき、(ii) の答えは $\frac{4}{5}$ に近づく。当て推量がほとんど望みのないとき、合格はほぼ必ず 4 問解答（3 問正解が必要）から生じ、5 問解答（4 問正解が必要）や 3 問解答（3 問すべての正解が必要で、その確率 p^3 は $4p^3$ よりずっと小さい）からはほとんど生じないのである。

よくある間違い

- 5 問に解答した場合、3 問正解では $6 - 2 = 4$ となり不合格であることを忘れる。4 問の正解が必要である。
- (ii) で分母から P_3 を落とす。3 問に解答して 3 問すべてに正解することも、合格する方法の一つである。
- (iii) を「確率 $\binom{5}{k}h^k(1-h)^{5-k}$ で k 問に解答する」と扱ってから小問 (i) を用いる方法でも解けるが、項を落としやすい。三つの結果による数え上げの方がすっきりしている。

STEP のその先へ

小問 (iii) は**間引き**（thinning）の一例である。各問題はある確率で残され、結果は独立なままであるから、正解・不正解・未解答の個数は多項分布（multinomial distribution）に従う。小問 (ii) はベイズ更新（Bayesian updating）であり、これは現代統計学の多くを支える考え方である。どちらも Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）や、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）で展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。