解答例

STEP I 2018、第 11 問

力学 ・ 斜面上の摩擦

STEP I 2018、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s1-q11

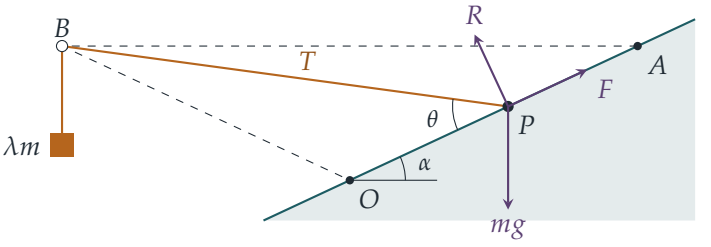
鍵となる考え方

まず幾何から始める。$OA = OB = d$ であるから三角形 OAB は二等辺三角形（isosceles triangle）であり、AB が水平であるからその 2 つの底角はともに α である。糸は P から O の側を越えて B の方へ戻っていくので、P を一部は斜面に沿って**下向き**に、一部は斜面から**離れる**向きに引く。したがって摩擦力（friction）が質点を支えなければならず、一方で垂直抗力（normal reaction）は張力（tension）によって小さくなる。釣り合い（equilibrium）の各条件は θ に関する不等式（inequality）であり、それが (i) で求めた範囲のすべての θ で成り立たなければならない。そこで最も厳しい位置を探すことになる。

解答

P とつり下げた物体を質点（particle）、糸を軽くて伸び縮みしない（inextensible）もの、滑車を滑らか（smooth）なものとしてモデル化する。すると張力は糸全体で等しい。つり下げた質点は釣り合っているので、

$$T = \lambda mg.$$



小問 (i)

O を原点とし、x 軸を水平にとる。すると $A = (d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$ である。点 B は A と同じ高さにあり、O からの距離が d であるから、$B = (\pm d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$ となる。プラスの符号は A 自身を与えるので、

$$B = (-d\cos\alpha,\ d\sin\alpha).$$

この点は斜面の直線より上にあり、O に関して A と反対側にある。三角形 OAB において $OA = OB = d$ であり、AB は水平で AO は水平と角 α をなすから $\angle OAB = \alpha$ である。よって $\angle OBA = \alpha$ でもあり、$\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$ となる。$\alpha < 45^\circ$ であるから、これは鈍角（obtuse angle）である。

P を OA 上の点とする。糸は PB に沿って張られ、それが L となす鋭角（acute angle）は $\theta = \angle BPO$ である。この角が鋭角であるのは、以下に示すとおり高々 $2\alpha < 90^\circ$ だからである。この角は三角形 PAB の外角（exterior angle）であるから、

$$\theta = \angle BPO = \angle PAB + \angle PBA = \alpha + \angle PBA.$$

P が O から A へ動くとき、半直線 BP は BO から BA の方へ回転するので、$\angle PBA$ は $\angle OBA = \alpha$ から 0 まで減少する。したがって

$$\alpha \le \theta \le 2\alpha,$$

であり、P が O にあるとき $\theta = 2\alpha$、P が A に近づくとき $\theta \to \alpha$ である。

これが力について何を意味するかに注意しよう。斜面を下る向き PO から測ると、糸は鋭角 θ をなし、斜面から離れる向きを指している。よって張力は、斜面に沿って下向きの成分 $T\cos\theta$ と、斜面に垂直で P を斜面から引き離す成分 $T\sin\theta$ をもつ。

小問 (ii)

斜面に垂直な方向に力を分解する（resolve）と、

$$R = mg\cos\alpha - T\sin\theta = mg(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

> **考えてみよう** μ がわからないこの小問では、摩擦力はどこに関わるのだろうか？

摩擦力は必要ない。μ がどんな値であっても、P は斜面に接したままでなければならないので、$R \ge 0$ が必要である。（実際には $R > 0$ である。もし $R = 0$ なら摩擦力は働かず、斜面に沿った $mg\sin\alpha + T\cos\theta > 0$ と釣り合うものが何もなくなる。）よって、すべての点で釣り合うためには

$$\lambda\sin\theta \le \cos\alpha \quad \text{現れるすべての} \theta \text{ について.}$$

が必要である。sin は $[\alpha, 2\alpha] \subset [0°, 90°)$ で増加するので、$\sin\theta$ の最大値は $\theta = 2\alpha$ で（あるいは P が O に近づくとき、いくらでもそれに近く）とられる。したがって $\lambda \sin 2\alpha \leq \cos\alpha$、すなわち $2\lambda \sin\alpha \cos\alpha \leq \cos\alpha$ である。$\cos\alpha > 0$ で割ると

$$2\lambda \sin\alpha \leq 1,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

重力と張力はともに P を斜面に沿って下向きに引くので、摩擦力 F は斜面に沿って上向きに働く。斜面に沿った方向に分解すると、

$$F = mg\sin\alpha + T\cos\theta = mg(\sin\alpha + \lambda\cos\theta).$$

この位置での釣り合いが可能であるための必要十分条件は $F \leq \mu R$ である（$F > 0$ であるから、これから $R > 0$ も従う）。$\mu = \tan\beta$ とおくと、条件は

$$\sin\alpha + \lambda\cos\theta \leq \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

となる。$\cos\beta > 0$ を掛けて λ を含む項をまとめると、

$$\lambda(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta) \leq \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha,$$
$$\lambda\cos(\beta - \theta) \leq \sin(\beta - \alpha).$$

ここで $0 < \beta < 90°$ かつ $0 < \theta \leq 2\alpha < 90°$ であるから、$-90° < \beta - \theta < 90°$ であり $\cos(\beta - \theta) > 0$ である。よって角 θ の位置で釣り合いが可能であるのは、ちょうど

$$\lambda \leq \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \theta)}.$$

のときである。これがすべての位置で成り立つためには、$\cos(\beta - \theta)$ が最大となるところ、すなわち範囲 $\alpha \leq \theta \leq 2\alpha$ の中で θ が β に最も近いところで成り立たなければならない。

$\beta \geq 2\alpha$ の場合。 範囲内のすべての θ は β 以下であるから、$0 \leq \beta - 2\alpha \leq \beta - \theta \leq \beta - \alpha < 90°$ である。余弦は $[0°, 90°)$ で減少するので、$\cos(\beta - \theta)$ は $\theta = 2\alpha$、すなわち O の位置（またはそのすぐ隣）で最大となる。したがって必要条件（necessary condition）は

$$\lambda \leq \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - 2\alpha)}.$$

である。ほかのすべての位置では λ に対する制約がこれより弱いので、これは十分条件（sufficient condition）でもある。

$\alpha \le \beta \le 2\alpha$ の場合。このとき $\theta = \beta$ は範囲内にある。小問 (i) により、L 上で O と A の間にある P のある位置が、ちょうどこの角を与える（$\beta = \alpha$ のときは $P \to A$ の極限として近づく）。そこでは $\cos(\beta - \theta) = 1$ でとりうる最大値となり、条件は

$$\lambda \le \sin(\beta - \alpha).$$

となる。その位置では、糸は全接触力（total contact force）に垂直である。全接触力は、摩擦力が限界に達しているとき法線と角 β をなす。$\beta = \alpha$ の場合はこれから $\lambda = 0$ が従う。このとき質点は自身の重さだけでちょうど限界釣り合い（limiting equilibrium）にあり、糸にわずかでも張力があれば滑り出してしまう。

検算

- $\beta = 2\alpha$ のとき、2 つの答えは一致する。このとき $\cos(\beta - 2\alpha) = 1$ であり、どちらも $\lambda \le \sin\alpha$ を与える。
- $\lambda = 0$ とすると、条件は $\sin(\beta - \alpha) \ge 0$、すなわち $\mu \ge \tan\alpha$ となる。これは粗い斜面上に物体が静止するためのおなじみの条件である。
- $\alpha = 20°$、$\beta = 50°$ のとき、上限は $\sin 30° / \cos 10° \approx 0.508$ である。コンピュータによる検証では、OA 上の多数の点に P を置いて力を直接分解し、すべての位置で釣り合いを与える最大の λ が、何千組ものランダムな α と β について両方の公式と一致することを確かめた。また、$\alpha \le \theta \le 2\alpha$ であることも確認した。

よくある間違い

- B を O に関して A と同じ側に置いてしまう。$OB = OA$ かつ $B \ne A$ であるから、B は O の反対側にあり、したがって張力は P を斜面に沿って上向きではなく**下向き**に引く。
- 張力が垂直抗力を小さくし、その結果、利用できる摩擦力も小さくなることを忘れる。
- (iii) の 2 つ目の場合で、両端の位置だけを調べる。最も厳しい位置は $\theta = \beta$ となるところであり、それは範囲の内部にある。

STEP のその先へ

組み合わせ $\lambda\cos(\beta - \theta) \le \sin(\beta - \alpha)$ は、**摩擦角**（angle of friction）を代数的に表したものである。全接触力は法線から角 β 以内になければならず、この領域はいわゆる

摩擦円錐（cone of friction）である。この円錐で考えるようにすると、多くの摩擦の問題は 1 行の幾何に帰着する。「すべての位置で」釣り合うことを求めるのは小さな最適化問題であり、技術者が最悪の場合（worst case）を想定して設計するときも同じように推論する。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と自由物体図（free-body diagram）を丁寧に扱っており、挑戦しがいのある問題も数多く収録している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。