解答例

STEP I 2018、第 10 問

力学 ・ 連結された質点

STEP I 2018、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

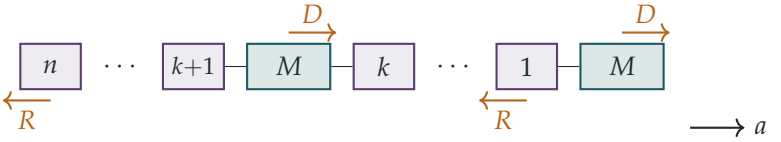
step.maths.org/questions/18-s1-q10

鍵となる考え方

どの車両も加速度（acceleration）は等しいので、まず列車全体からそれを一度だけ求め、次に列車のうち最も扱いやすい部分にニュートン（Newton）の第 2 法則（Newton's second law）を適用する。列車をある連結器（coupling）のところで切り離すと、その連結器の張力（tension）が外力（external force）として現れる。後半の小問を易しくする工夫は、先頭の張力 T を、先頭の機関車から求める方法と、その後ろにあるものの全体から求める方法の二通りで計算することである。こうすると T がただ一つの量 $R + ma$ と結びつき、この量が他のすべての連結器の張力も決めることになる。

解答

モデル化。 各機関車と各客車を水平な線路上を動く質点（particle）とみなし、連結器を、張力も圧縮（compression）も受けうる軽い棒（light rod）とみなす。機関車には抵抗（resistance）がはたらかず、各車両にはたらく鉛直方向の力はつり合っているので、考えるべきは水平方向の力だけである。加速度 a は進行方向を正にとる。客車に前から順に $1, 2, \ldots, n$ と番号をつけ、客車 $1, \ldots, k$ が二つの機関車の間に、客車 $k+1, \ldots, n$ が 2 両目の機関車の後ろにあるとする（ただし $1 \leq k \leq n-1$）。



（各客車には後ろ向きに抵抗 R がはたらくが、図には二つだけ描いてある。）

加速度。 列車全体の質量は $nm+2M$ であり、連結器の力は内力なので、

$$(nm+2M)a = 2D - nR, \qquad a = \frac{2D-nR}{nm+2M} > 0,$$

となる。$2D > nR$ であるから、これは正である。特に $R+ma>0$ であり、この事実を何度も用いる。

小問 (i)

先頭の機関車は D によって前向きに引かれ、その連結器の張力 T によって後ろ向きに引かれるので、

$$D - T = Ma.$$

したがって

$$\begin{aligned} T = D - \frac{M(2D-nR)}{nm+2M} &= \frac{D(nm+2M) - 2MD + nMR}{nm+2M} \\ &= \frac{n(mD+MR)}{nm+2M}, \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

T のより簡潔な形。 今度は先頭の機関車より後ろにあるもの全体、すなわち機関車 1 両と客車 n 両に注目する。その全質量は $M+nm$ である。これは T と 2 両目の機関車の D によって前向きに引かれ、nR の抵抗を受ける：

$$T + D - nR = (M+nm)a.$$

ここから $D - T = Ma$ を引くと D が消去される：

$$2T - nR = nma, \qquad \text{よって} \qquad T = \tfrac{1}{2}n\,(R+ma).$$

小問 (ii)

先頭以外の連結器は、次の二種類のいずれかである。

2 両目の機関車より前にある連結器。 $1 \le j \le k$ に対し、客車 j のすぐ後ろの連結器の張力を T_j とする（したがって T_k は客車 k と 2 両目の機関車の間の連結器の張力である）。先頭の機関車と客車 $1,\dots,j$ の質量は $M+jm$ であり、これらは T_j によって後ろ向きに引かれる：

$$D - jR - T_j = (M+jm)a \quad \Longrightarrow \quad T_j = (D-Ma) - j(R+ma) = T - j(R+ma).$$

$R+ma>0$ かつ $j \ge 1$ であるから、k の値にかかわらず、このような連結器はすべて $T_j < T$ を満たす。

2 両目の機関車より後ろにある連結器。 $k+1 \le j \le n$ に対し、客車 j のすぐ前の連結器の張力を S_j とする。その後ろにある車両、すなわち客車 $j, \dots, n$ の $n-j+1$ 両に注目するのが最も簡単である。これらを前向きに引くのは S_j だけである：

$$S_j - (n-j+1)R = (n-j+1)ma \quad \Longrightarrow \quad S_j = (n-j+1)(R+ma).$$

> **考えてみよう** これら後方の連結器のうち、最大の張力を受けるのはどれか。また、それは T と比べてどうか。

張力 S_j は j が増えると減少するので、最大のものは 2 両目の機関車のすぐ後ろの連結器の $S_{k+1} = (n-k)(R+ma)$ である。これを $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$ と比べ、$R+ma > 0$ で割ると、

$$S_{k+1} < T \iff n-k < \tfrac{1}{2}n \iff k > \tfrac{1}{2}n.$$

よって $k > \frac{1}{2}n$ ならば、後方の連結器の張力はすべて $S_{k+1} < T$ 以下であり、前方の連結器はすべて $T_j < T$ を満たす。したがって T は他のどの連結器の張力よりも大きく、題意は示された。（この条件は必要条件でもある。$k \le \frac{1}{2}n$ ならば $S_{k+1} \ge T$ となる。）

小問 (iii)

客車 k と 2 両目の機関車の間の連結器を考える。小問 (ii) と $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$ より、

$$T_k = T - k(R+ma) = \left(\tfrac{1}{2}n - k\right)(R+ma).$$

$k > \frac{1}{2}n$ ならば、第 1 の因数は負、第 2 の因数は正なので $T_k < 0$ となる。つまり、この連結器は圧縮を受けている。物理的には、先頭の機関車が前の k 両の客車（列車の半分より多い）を引く一方で、2 両目の機関車がそれらを後ろから押しているのである。

検算

- $n=5$、$k=3$、$M=10$、$m=2$、$D=20$、$R=1$ とする。このとき $a = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$ であり、公式から $T = \frac{5(40+10)}{30} = \frac{25}{3}$ となって、$D - Ma = 20 - \frac{35}{3}$ と一致する。列車を前から後ろへたどると、張力は $\frac{25}{3}, 5, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$（客車 3 と機関車の間）、続いて $\frac{20}{3}, \frac{10}{3}$ となる。よって T が最大であり、予測どおり圧縮を受ける連結器はちょうど一つである。
- $M=0$ とすると機関車は単なる力となり、$T = D$ となる。質量のない先頭機関車ならば当然そうなるはずである。
- 各張力は力に無次元（dimensionless）の比を掛けたものなので、単位は正しい。

よくある間違い

- 機関車にも抵抗を与えてしまう。問題では抵抗は客車にのみはたらく。
- 2 両目の機関車の駆動力（driving force）が、その機関車を含む列車の部分にはたらくことを忘れる。
- すべての連結器が張力を受けていなければならないと思い込む。連結器は棒なので、負の張力は物理的にまったく自然な「押す力」である。

STEP のその先へ

系をいくつかの部分に分け、それぞれについて別々に自由体図（free-body diagram）を描き、内力（internal force）が大きさが等しく向きが反対の対として現れるようにすることは、連結された物体の力学の基礎である。大学 1 年次の講義では、これはトラス（truss）や骨組み（framework）の解析へと発展する。そこでは多くの部材の内力を一度に求め、部材の中には引張を受ける引張材（tie）ではなく、圧縮を受ける圧縮材（strut）となるものがあることがわかる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、自由体図とニュートンの第 3 法則（Newton's third law）を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。