解答例

STEP I 2018、第 1 問

純粋数学 • 曲線で囲まれた図形の面積

> **STEP I 2018、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q1

鍵となる考え方

三次関数（cubic）と直線の式を等しいとおくと、因数 x がくくり出され、残りは平方の差（difference of two squares）となるので、3 つの交点（intersection）はすべてきれいに求まる。その後はすべて定型的な微積分であり、置換（substitution）$c = b - a$（P の x 座標）を用いると式変形がすっきりする。最後の不等式は一見手ごわいが、2 つの面積をともに c で表せば、$b > a$ という条件に帰着してしまう。

解答

交点と概形

交点では $x(b-x)^2 = a^2 x$ であるから、$x = 0$（原点）であるか、または

$$(b-x)^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad b - x = \pm a \quad \Longrightarrow \quad x = b - a \text{ または } x = b + a.$$

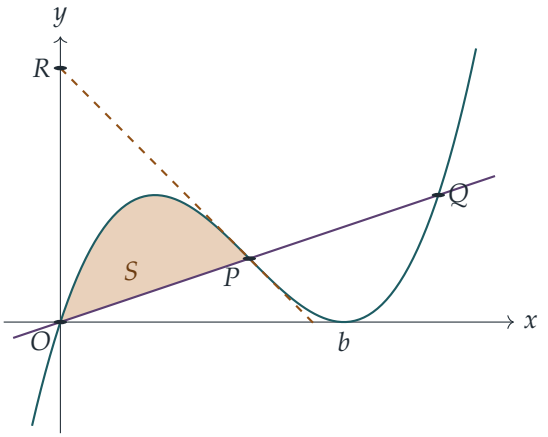
$a > 0$ より $b - a < b + a$ であるから、

$$P = (b-a,\ a^2(b-a)), \qquad Q = (b+a,\ a^2(b+a)).$$

$0 < a < b$ であるから、どちらの点も第 1 象限にある。

概形について：三次関数 $y = x(b-x)^2$ は O で単根をもち、$x = b$ で重根（repeated root）をもつ。そこで曲線は x 軸に接する。$x < 0$ では負、$x > 0$ では（$x = b$ を除いて）正であり、$x \to \infty$ のとき $+\infty$ に発散する。導関数（derivative）は（後で求めるように）$(b-x)(b-3x)$ であるから、$x = b/3$ で極大値（local maximum）をとり、$(b, 0)$ で極小値（local minimum）をとる。O を通る直線は O の近くで曲線の増加する部分と交わり、P で再び交わり（$a < \frac{2}{3}b$ のときは $b/3$ と b の間、そうでないときは $b/3$ よ

り手前)、さらに接点 $x = b$ より先の Q で 3 度目に曲線と交わる。図では $a = 1$、$b = 3$ としている。P における接線（tangent)、点 R、および面積 S の領域もあわせて示してある。



P における接線

積の微分法（product rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (b-x)^2 - 2x(b-x) = (b-x)(b-3x).$$

P では $x = b - a$ であるから、$b - x = a$、$b - 3x = 3a - 2b$ である。よってそこでの傾き（gradient）は $m = a(3a - 2b)$ である。

接線を $y = mx + k$ とし、直線が P を通るように k を定めると、

$$\begin{aligned} k &= a^2(b-a) - a(3a-2b)(b-a) \\ &= a(b-a)(a-3a+2b) \\ &= 2a(b-a)^2. \end{aligned}$$

したがって、P における接線は $y = a(3a - 2b)x + 2a(b - a)^2$ であり、題意が示された。特に $R = (0,\, 2a(b-a)^2)$ であり、これは y 軸の正の部分にある。

面積 S

P の x 座標を $c = b - a > 0$ とおく。$0 < x < c$ において

$$x(b-x)^2 - a^2x = x\,(b-x-a)(b-x+a) > 0,$$

である。この範囲では 3 つの因数がすべて正だからである。よって O と P の間では曲線は直線より上にあり、

$$S = \int_0^c \left(x(b-x)^2 - a^2x\right)\mathrm{d}x = \int_0^c \left((b^2-a^2)x - 2bx^2 + x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{(b^2-a^2)c^2}{2} - \frac{2bc^3}{3} + \frac{c^4}{4}.$$

ここで $b^2-a^2=c(b+a)=c(c+2a)$ および $b=c+a$ を代入すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{c^3(c+2a)}{2} - \frac{2c^3(c+a)}{3} + \frac{c^4}{4} \\ &= c^3\left[\, c(\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}) + a(1-\tfrac{2}{3})\right] \\ &= c^3\Big(\frac{c}{12}+\frac{a}{3}\Big) = \frac{c^3(c+4a)}{12}. \end{aligned}$$

$c+4a=b+3a$ であるから、これは

$$S=\frac{1}{12}(b-a)^3(3a+b),$$

となり、題意が示された。

考えてみよう なぜすべてを a と b で展開してしまわないのか？

そうすることもできるが、目標の式には因数 $(b-a)^3$ があり、a と b の 4 次式からこれをくくり出すのは骨が折れる。$c=b-a$ とおけば、積分のどの項もすでに c^2 以上を含んでいるので、この因数が自然に現れる。

三角形 T と不等式

三角形 OPR の底辺として OR をとる。これは y 軸上にあり、長さは $2ac^2$ である。高さは P から y 軸までの距離、すなわち c である。よって

$$T=\tfrac{1}{2}\cdot 2ac^2\cdot c=ac^3=a(b-a)^3.$$

したがって、$(b-a)^3>0$ より

$$S-\tfrac{1}{3}T=\frac{(b-a)^3}{12}(3a+b-4a)=\frac{(b-a)^4}{12}>0,$$

である。ここで $b\neq a$ を用いた。ゆえに $S>\frac{1}{3}T$ であり、題意が示された。

検算

- $a=1$、$b=3$（図の場合）のとき：$P=(2,2)$、$Q=(4,4)$ であり、曲線は $x=2$ で $y=2$、$x=4$ で $y=4$ を与える。接線の公式は $y=-3x+8$ を与え、傾きの式 $(3-x)(3-3x)$ は $x=2$ で -3 となる。直接積分すると $S=\int_0^2(x^3-6x^2+8x)\,\mathrm{d}x=4-16+16=4$ となり、$\frac{1}{12}\cdot 8\cdot 6=4$ と一致する。また $T=8$ であり、$4>\frac{8}{3}$ である。
- 比 $S/(\frac{1}{3}T)=(3a+b)/(4a)$ は $b\to a$ のとき 1 に収束（converge）するので、定数 $\frac{1}{3}$ は最良である。これは納得のいくことである。放物線（parabola）$y=px-qx^2$ に対して同じ構成を行うと $S=qc^3/6$、$T=qc^3/2$ となり、ちょうど $S=\frac{1}{3}T$ が成り立つ。そして P が O に非常に近いとき、その間の三次曲線はほとんど放物線である。

- ランダムに選んだ数千組の $0 < a < b$ について、交点、接線、面積（数値積分による）、不等式をコンピュータで確認したところ、いずれも公式と一致した。

よくある間違い

- $x(b-x)^2 = a^2x$ を x で割ってしまい、解 $x = 0$ に言及しない。あるいは $b - x = a$ のみを考えて Q を見落とす。
- 「直線 − 曲線」を積分して負の「面積」を得てしまう。積分する前に、どちらのグラフが上にあるかを確認すること。
- 概形を描く際に、三次曲線が $x = b$ で x 軸に接するのではなく、横切るように描いてしまう。

STEP のその先へ

最後の小問における極限の比 1 は、アルキメデス（Archimedes）による放物線の求積（quadrature）の精神に通じるものである。放物線の場合、その弓形の面積は三角形 OPR の面積のちょうど 3 分の 1 であり、O の近くでは三次曲線は局所的に放物線とみなせるので、極限において不等式は等式にまで鋭くなる。局所的な振る舞いがなぜテイラー（Taylor）展開の最初の数項によって決まるのかを理解し、「ほとんど放物線」という言葉を厳密にすることは、大学 1 年次の解析学（analysis）の仕事である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、テイラーの定理がきちんと扱われる様子を見るのに親しみやすい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。