解答例

STEP III 2017、第 9 問

力学 ・ 連結された質点とエネルギー

STEP III 2017、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

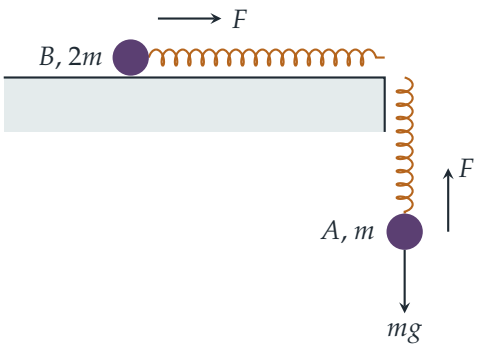
step.maths.org/questions/17-s3-q9

鍵となる考え方

ばねの張力（tension）は未知であり時間とともに変化するが、両方の質点に同じ大きさで作用する。したがって、2 つの運動方程式（equations of motion）を適切な比で足し合わせれば張力は消去され、すぐに積分できる式が残る。後半では、この積分して得られた関係式から、時刻 T における両質点の位置と、それらの速さの間の関係がわかる。さらにエネルギー保存則（conservation of energy）から 2 つ目の方程式が得られ、この 2 式を合わせると B の速さが決まる。

解答

A と B を質点とみなし、ばねは軽い（質量が無視できる）ものとする。台はなめらかであり、ばねは台の縁をなめらかに通っている。放した後、A は鉛直に落下し、B は台の上を縁に向かって滑る。時刻 t におけるばねの張力を F とする。$x < a$ である間は、B はまだ台の上にある。



関係式 $y + 2x = \frac{1}{2}gt^2$

A については下向きを正として y をとり、B については縁に向かう向きを正として x をとる。ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）により、

$$\begin{aligned} &\text{質点}A\text{ について（鉛直方向）：} \quad m\ddot{y} = mg - F, \\ &\text{質点}B\text{ について（水平方向）：} \quad 2m\ddot{x} = F. \end{aligned}$$

（B については、重力と垂直抗力（normal reaction）がつり合い、摩擦はない。）2 つの方程式を足すと F が消える：

$$m\ddot{y} + 2m\ddot{x} = mg \quad \Longrightarrow \quad \ddot{y} + 2\ddot{x} = g.$$

両質点は $x = y = 0$ で静止した状態から動き始める。1 回積分すると $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$ となる。$t = 0$ で両方の速度が 0 なので積分定数はつかない。もう 1 回積分すると

$$y + 2x = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

となり、ここでも積分定数はつかない。これが求める結果である。

> **考えてみよう** F は伸び $y - x$ に依存し、その伸びは絶えず変化するので、F はわからない。それでもなぜ何かが言えるのだろうか？

F を求める必要はまったくない。2 つの方程式に適切な係数を掛ける（ここでは単に足す）と、F は逆符号で現れる。組み合わせ $y + 2x$ は運動量に似た量 $my + 2mx$ の $1/m$ 倍であり、それを変化させる外力は A にはたらく重力だけである。

時刻 T における B の速さ

時刻 $T = \sqrt{6a/g}$ に質点 B は縁に達するので、$x = a$ である。$\frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g \cdot \frac{6a}{g} = 3a$ であるから、前半の結果より

$$y + 2a = 3a \quad \Longrightarrow \quad y = a.$$

よって、時刻 T におけるばねの伸びは $y - x = a - a = 0$ である。ばねは再び自然長に戻っており、弾性エネルギー（elastic energy）を蓄えていない。

時刻 T における B と A の速さをそれぞれ u と v とおく。1 回積分した関係式 $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$ から、$t = T$ において

$$v + 2u = gT = \sqrt{6ag}. \tag{1}$$

エネルギー。台はなめらかでばねは軽いので、力学的エネルギーは保存される。最初、両質点は静止しており、ばねは伸びていない。時刻 T には A は距離 a だけ落下してお

り、ばねは再び伸びていないので、位置エネルギーの減少分 mga はすべて運動エネルギー（kinetic energy）になっている：

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2m)u^2 = mga \quad \Longrightarrow \quad v^2 + 2u^2 = 2ga. \tag{2}$$

考えてみよう 方程式が 2 つあり、そのうち 1 つは 2 次式である。速さは 2 通りありうると考えるべきではないか？

(1) から得られる $v = \sqrt{6ag} - 2u$ を (2) に代入すると、

$$\begin{aligned} 6ag - 4\sqrt{6ag}\,u + 4u^2 + 2u^2 &= 2ga \\ 6u^2 - 4\sqrt{6ag}\,u + 4ag &= 0 \\ 3u^2 - 2\sqrt{6ag}\,u + 2ag &= 0. \end{aligned}$$

判別式（discriminant）は $4 \cdot 6ag - 4 \cdot 3 \cdot 2ag = 0$ であるから、この 2 次式は完全平方式であり、根はただ 1 つである：

$$(\sqrt{3}\,u - \sqrt{2ag})^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2ag}{3}}.$$

よって、B が縁に達したときの速さは、求めるとおり $\sqrt{2ag/3}$ である。(1) より $v = \sqrt{6ag} - 2\sqrt{2ag/3} = \sqrt{2ag/3}$ も成り立つ。この瞬間、2 つの質点は同じ速さで動いており、これはばねが自然長にあることと整合する。

検算

- 重根には意味がある。「運動量」の総和 $v + 2u$ を固定すると、運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2 + mu^2$ は $v = u$ のとき最小となり、ここではその最小値がちょうど mga である。したがって、エネルギーの式と (1) が同時に成り立つのは $u = v$ のときに限られ、そのとき (1) から直ちに $3u = \sqrt{6ag}$ が得られる。
- 運動を完全に解く（問題文ではそうしないよう指示されている）と、$\omega^2 = 3\lambda/(2am)$ として $\omega T = 2\pi$ となる。つまり、伸びはちょうど 1 周期の振動をして 0 に戻る。$a = 1.3\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として逐次的な数値積分を行うと、$x(T) = y(T) = a$ となり、両方の速さは $2.9143\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \sqrt{2ag/3}$ に等しくなる。
- 次元：$\sqrt{ag}$ は速さであり、$\sqrt{a/g}$ は時間である。

よくある間違い

- ばねは一般には弾性エネルギーをもつことを忘れる。この議論が成り立つのは、時刻 T で $x = y = a$ となり伸びが 0 になるからにほかならない。このことを明示的に

示すこと。

- エネルギーの式だけを書いて、それを u について解こうとする。未知数が 2 つあるので、関係式 (1) も必要である。

STEP のその先へ

量 $my + 2mx$ は運動量のようにふるまう：内力（ここではばねの張力）はその中で打ち消し合い、外力だけがそれを変化させる。これが質点系の力学（mechanics of systems of particles）の出発点である。一般には、運動を重心（centre of mass）の運動と相対運動に分け、ここでは相対座標 $y - x$ が単振動（simple harmonic motion）を行う。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これらの考え方が丁寧に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。