解答例

# STEP III 2017、第 8 問

純粋数学 ・ 部分和分

> **STEP III 2017、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q8

## 鍵となる考え方

冒頭の恒等式は部分積分（integration by parts）の離散版（「部分和分（summation by parts）」）である。これは $b$ の差分を含む和を、$a$ の差分を含む和に置き換えるものである。これを三角関数の和に用いるには、$b_{m+1} - b_m$ が求めたい項を生み出すように $b_m$ を選べばよい。和積の公式（sum-to-product formula）により、正弦どうしや余弦どうしの差は一つの積に変わる。そのうえで $a_m$ を 1 または $m$ に選べば、もう一方の辺は簡単になる。

## 解答

### 恒等式

量 $a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1$ は望遠鏡和（telescoping sum）として次のように書ける。

$$a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 = \sum_{m=1}^{n} (a_{m+1}b_{m+1} - a_m b_m).$$

各括弧の中で $a_m b_{m+1}$ を足して引くと、

$$a_{m+1}b_{m+1} - a_m b_m = a_m(b_{m+1} - b_m) + b_{m+1}(a_{m+1} - a_m).$$

これを $m = 1, \ldots, n$ について足し合わせて整理すれば、求める恒等式がそのまま得られる。

三角関数を扱う部分では、$\operatorname{cosec} \frac{1}{2}x$ が定義されるように、終始 $\sin \frac{1}{2}x \neq 0$（すなわち $x$ は $2\pi$ の倍数でない）と仮定する。

**小問 (i)**

$b_m = \sin mx$ とおき、$A = (m+1)x$、$B = mx$ として和積の公式を用いると、

$$b_{m+1} - b_m = \sin(m+1)x - \sin mx = 2\cos(m+\tfrac{1}{2})x \, \sin \tfrac{1}{2}x.$$

ここで、すべての $m$ について $a_m = 1$ とすると、$a_{m+1} - a_m = 0$ となり、恒等式の最後の和は消える。恒等式は次のようになる。

$$2\sin \tfrac{1}{2}x \sum_{m=1}^{n} \cos(m+\tfrac{1}{2})x = b_{n+1} - b_1 = \sin(n+1)x - \sin x.$$

$2\sin \frac{1}{2}x \neq 0$ で割ると、

$$\sum_{m=1}^{n} \cos(m+\tfrac{1}{2})x = \tfrac{1}{2}(\sin(n+1)x - \sin x)\operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x,$$

となり、示すべき式が得られた。

**小問 (ii)**

因子 $m$ があることから $a_m = m$ とおくことが考えられ、このとき $a_{m+1} - a_m = 1$ である。すると $b_{m+1} - b_m$ が $\sin mx$ の定数倍になる必要がある。

? **考えてみよう** $b_m$ をどう選べば、$b_{m+1} - b_m$ が $\sin mx$ の定数倍になるか。

小問 (i) では、$(m+1)x$ と $mx$ における二つの正弦の差が、**中点** $(m+\frac{1}{2})x$ における余弦を与えた。$\sin mx$ を得るには、引数の中点が $mx$ となるような余弦どうしの差がほしいので、$b_m = \cos(m-\frac{1}{2})x$ とおく。$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$（これは問題文の最初の注からも導かれる）を用いると、

$$b_{m+1} - b_m = \cos(m+\tfrac{1}{2})x - \cos(m-\tfrac{1}{2})x = -2\sin mx \, \sin \tfrac{1}{2}x.$$

$S = \sum_{m=1}^{n} m\sin mx$ とおく。$a_m = m$ として恒等式を用いると、

$$-2\sin \tfrac{1}{2}x \, S = (n+1)\cos(n+\tfrac{1}{2})x - \cos \tfrac{1}{2}x - \sum_{m=1}^{n} \cos(m+\tfrac{1}{2})x.$$

最後の和はちょうど小問 (i) のものである。これを代入し、全体に $-2\sin\frac{1}{2}x$ を掛けると、

$$4\sin^2 \tfrac{1}{2}x \, S = 2\sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x - 2(n+1)\cos(n+\tfrac{1}{2})x \, \sin \tfrac{1}{2}x + \sin(n+1)x - \sin x.$$

次に、二つの積を簡単にする。

▶ $2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \sin x$ であり、これは $-\sin x$ と打ち消し合う。

- $A=(n+\frac{1}{2})x$、$B=\frac{1}{2}x$ として $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$ を用いると、

$$2\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\,\sin\tfrac{1}{2}x=\sin(n+1)x-\sin nx.$$

したがって、

$$\begin{aligned}4\sin^2\tfrac{1}{2}x\,S&=-(n+1)\left(\sin(n+1)x-\sin nx\right)+\sin(n+1)x\\&=-n\sin(n+1)x+(n+1)\sin nx.\end{aligned}$$

$4\sin^2\frac{1}{2}x$ で割ると、

$$\sum_{m=1}^{n}m\sin mx=\left(-\tfrac{n}{4}\sin(n+1)x+\tfrac{n+1}{4}\sin nx\right)\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}x,$$

よって、

$$p=-\frac{n}{4},\qquad q=\frac{n+1}{4}.$$

## 検算

- $n=1$ のとき、$1-\cos x=2\sin^2\frac{1}{2}x$ を用いると、公式は $\frac{1}{4}(2\sin x-\sin 2x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\sin x\,(1-\cos x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x=\sin x$ を与える。これはただ一つの項 $1\cdot\sin x$ に一致する。
- 数値で確かめると、$n=3$、$x=1$ のとき $\sin 1+2\sin 2+3\sin 3\approx 3.08343$ であり、$\left(-\frac{3}{4}\sin 4+\sin 3\right)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\approx 3.08343$ も同じ値になる。
- 小問 (ii) は、$\sum_{m=1}^{n}\cos mx$ を $x$ で微分しても求められ、その結果は $-S$ となる。これは独立した検算として役に立つ。

## よくある間違い

- 小問 (ii) で $b_m=\cos mx$ と選んでしまうこと。このとき差は $\sin mx$ ではなく $\sin(m+\frac{1}{2})x$ の定数倍となり、方法が行き詰まる。
- $\cos A-\cos B$ の符号の誤り。正しくは $-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ であり、マイナス符号が付く。
- $\sin\frac{1}{2}x\neq 0$ で割る前に、そのことを述べ忘れること。

## STEP のその先へ

部分和分（アーベルの総和法（Abel summation））は部分積分の離散版の双子であり、大学 1 年の解析学で大いに活躍する道具である。$\cos(m+\frac{1}{2})x$ の部分和が有界にとどまる

ことを示す小問 (i) のような評価と組み合わせると、ディリクレの判定法（Dirichlet's test）が証明できる。たとえば、$\sum \frac{\sin mx}{m}$ はすべての $x$ に対して収束（converge）する。小問 (ii) のような和はフーリエ級数（Fourier series）にも現れ、そこではこうした閉じた形の式が収束を調べる出発点となる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、アーベルの総和法とディリクレの判定法をわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。