解答例

STEP III 2017、第 7 問

純粋数学 • 楕円の接線

> **STEP III 2017、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q7

鍵となる考え方

パラメータ t を用いると、「T における接線が (X, Y) を通る」という条件は t についての 2 次方程式に変わる。各解が 1 つの接点に対応するので、点から引ける接線の本数を数えることは実数解の個数を数えることと同じであり、これは判別式（discriminant）の問題になる。小問 (ii) では、2 つの接点のパラメータ p と q がちょうどこの 2 次方程式の 2 つの解なので、それらの和と積は係数からただちに得られる。

解答

点が楕円上にあること

T の座標を代入すると、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1 + 2t^2 + t^4}{(1+t^2)^2} = 1,$$

となるので、すべての実数 t に対して T は楕円（ellipse）上にある。

小問 (i)

t で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

これらを割り算する（$t = 0$ のとき扱いにくい）代わりに、楕円上の点 (x_0, y_0) における標準的な接線（tangent）の方程式 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ を用いる。その法線方向 $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$ は上の速度ベクトルと垂直である。実際、$\frac{1-t^2}{a} \cdot (-4at) + \frac{2t}{b} \cdot 2b(1-t^2) = 0$ である。し

たがって T における接線 L は

$$\frac{x(1-t^2)}{a(1+t^2)}+\frac{2ty}{b(1+t^2)}=1 \iff bx(1-t^2)+2aty=ab(1+t^2).$$

$(x,y)=(X,Y)$ を代入し、t の累乗ごとに整理すると、

$$bX-bXt^2+2aYt-ab-abt^2=0 \iff (a+X)bt^2-2aYt+b(a-X)=0,$$

となり、示すべき式が得られた。

2本の接線。 逆向きに読むと、パラメータ t の点における接線が (X,Y) を通るのは、t がこの方程式を満たすとき、かつそのときに限る。$X\neq -a$ かつ $b\neq 0$ なので t^2 の係数は0でなく、これは真の2次方程式であり、その判別式は

$$4a^2Y^2-4b^2(a+X)(a-X)=4(a^2Y^2-(a^2-X^2)b^2).$$

である。$a^2Y^2>(a^2-X^2)b^2$ ならばこれは正なので、相異なる2つの実数解 $t_1\neq t_2$ が存在する。異なる t の値は楕円上の異なる点を与える（写像 $t\mapsto T$ は1対1（one-to-one）である。$t=\tan\frac{\theta}{2}$ とおけば、$-\pi<\theta<\pi$ に対するおなじみの $(a\cos\theta,b\sin\theta)$ になる）。また、楕円の接線は接点でしか楕円と交わらないので、異なる接点は異なる接線を与える。よって (X,Y) を通る相異なる接線が2本存在する。

> **考えてみよう** パラメータ t では表せない接線を見落としている可能性はないだろうか。

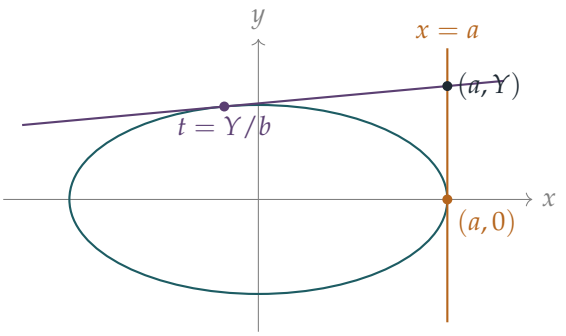
楕円上の点で $(*)$ の形に表せないのは $(-a,0)$（$t\to\infty$ の極限）だけであり、そこでの接線は $x=-a$ である。この直線が (X,Y) を通るのは $X=-a$ のときに限るが、これは除外されている。よって、この2次方程式は (X,Y) を通るすべての接線を捉えている。

解釈。 条件を $a^2b^2>0$ で割ると

$$\frac{Y^2}{b^2}>1-\frac{X^2}{a^2} \iff \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}>1,$$

となり、これは (X,Y) が楕円の**外部**にあることを意味する。したがって、円の場合と同様に、楕円の外部の任意の点から楕円に2本の接線を引くことができる。

$X^2=a^2$ の場合。 このとき条件は $a^2Y^2>0$、すなわち $Y\neq 0$ となる。点は鉛直な直線 $x=\pm a$ のいずれかの上にあるが、頂点 $(\pm a,0)$ ではない。一方の接線は単に鉛直な直線 $x=\pm a$ そのものであり、楕円と $(\pm a,0)$ で接する。もう一方は楕円の別の点で接する。$X=a$ のとき2次方程式は $2abt^2-2aYt=0$ となり、解は $t=0$（鉛直な接線）と $t=Y/b\neq 0$ である。$X=-a$ のときは $-2aYt+2ab=0$ となって $t=b/Y$ を与え、2本目の接線は $x=-a$、すなわち欠けている点 $(-a,0)$ における接線である。図は $X=a, Y>0$ の場合を示している。



よって $X^2 = a^2$ のときも結果は成り立つ。$Y \neq 0$ であるとき、すなわち点が楕円の外部にあるときは常に、(X, Y) を通る相異なる接線が 2 本存在する。

小問 (ii)

P における接線は (X, Y) を通るので、小問 (i) より p は

$$(a + X)bt^2 - 2aYt + b(a - X) = 0,$$

の解であり、q も同様である。$X \neq -a$ なのでこれは 2 次方程式であり、また（$P \neq Q$ より）$p \neq q$ なので、p と q はその 2 つの解である。したがって、解と係数の関係（relationship between roots and coefficients）より

$$pq = \frac{b(a - X)}{b(a + X)} = \frac{a - X}{a + X} \quad \Longrightarrow \quad (a + X)pq = a - X,$$

となり示すべき式が得られ、さらに

$$p + q = \frac{2aY}{b(a + X)}.$$

である。

最後の部分

接線 $bx(1 - t^2) + 2aty = ab(1 + t^2)$ において $x = 0$ とおくと $2aty = ab(1 + t^2)$ を得る。接線は y 軸と交わるので $p, q \neq 0$ である（$t = 0$ のとき接線は $x = a$）。よって

$$y_1 = \frac{b(1 + p^2)}{2p}, \qquad y_2 = \frac{b(1 + q^2)}{2q}.$$

$\frac{1+p^2}{p} = p + \frac{1}{p}$ と書くと、

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2}\left(p + q + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{b}{2}(p + q)\left(1 + \frac{1}{pq}\right) = \frac{b(p + q)(1 + pq)}{2pq}.$$

上で得た結果から $1+pq=\dfrac{2a}{a+X}$ であるので、$pq=\dfrac{a-X}{a+X}\neq 0$ を用いて

$$y_1+y_2=\frac{b}{2}\cdot\frac{2aY}{b(a+X)}\cdot\frac{2a}{a+X}\cdot\frac{a+X}{a-X}=\frac{2a^2Y}{(a+X)(a-X)}=\frac{2a^2Y}{a^2-X^2}.$$

これを $2b$ に等しいとおき、$(a^2-X^2)/(2a^2b)$（$X^2\neq a^2$ より 0 でない）を掛けると、

$$\frac{Y}{b}=\frac{a^2-X^2}{a^2}=1-\frac{X^2}{a^2}\iff\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y}{b}=1,$$

となり、示すべき式が得られた。したがって、交点は $(\pm a,0)$ と $(0,b)$ を通る放物線（parabola）上にある。

検算

- $a=2$, $b=1$, $(X,Y)=(4,1)$（$4+1>1$ より外部）とすると、2 次方程式は $6t^2-4t-2=0$ となり、解は $t=1$ と $t=-\frac{1}{3}$ である。これらは $(0,1)$ と $(1.6,-0.6)$ における接線に対応する。2 本の接線 $y=1$ と $2x-3y=5$ はいずれも確かに $(4,1)$ を通る。このとき $pq=-\frac{1}{3}=\frac{2-4}{2+4}$、$p+q=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ であり、公式の予測どおりである。
- 中心 $(0,0)$ では判別式は $-4a^2b^2<0$ となり、接線は存在しない。楕円の内部の点なので、予想どおりである。
- 多数のランダムな楕円と点 P,Q の組について、接線の交点を直接求めてコンピュータで確認した。pq, $p+q$, y_1+y_2 の公式はすべて一致し、$y_1+y_2=2b$ のとき交点は $X^2/a^2+Y/b=1$ を満たした。

よくある間違い

- 傾きを $\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$ として求め、接線が鉛直になる $t=0$ でこれが破綻することを忘れる。
- $X=-a$ のときにも $(a+X)bt^2-2aYt+b(a-X)=0$ を 2 次方程式として扱ってしまう。まさにこのために、$X^2=a^2$ の場合は別に扱う必要がある。
- 「判別式が正である」で止めてしまい、2 つの解がなぜ**異なる** 2 本の直線を与えるのかを説明しない。

STEP のその先へ

2 次曲線（conic）の有理パラメータ表示（rational parametrisation）$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$ は代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である。有理点を 1 つもつ 2 次曲線が必ず無

数の有理点をもつのはこのためであり、ピタゴラス数（Pythagorean triples）の分類の基礎にもなっている。外部の点から引いた 2 本の接線は極線（polar）の概念や射影幾何学（projective geometry）へとつながり、そこでは $t = \infty$ に対応する厄介な欠けた点も普通の点になる。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* には、この種の問題がさらに収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。