解答例

STEP III 2017、第 6 問

純粋数学 • 置換積分

STEP III 2017、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

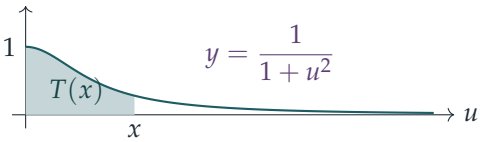
step.maths.org/questions/17-s3-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.2 節「積分から三角関数を構成する」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/trig-from-integral.html

鍵となる考え方

ここでは逆正接関数（inverse tangent）を、その積分表示だけから組み立てていく。したがって、あらゆる事実は置換（substitution）から導かなければならない。置換 $u \mapsto 1/u$ は区間 $(0, x)$ と $(1/x, \infty)$ を入れ替える。また、メビウス（Möbius）型の置換 $v = \frac{u+a}{1-au}$ は、被積分関数と微分をひとまとめにした $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ を変えないので、積分の上下端をずらすだけである。最後の小問では、ずらした端がすでに値のわかっている点に戻ってくるように数を選ぶ。そうすれば、解くことのできる方程式が得られる。

解答



$T(x)$ は網掛け部分の面積であり、T_∞ は $u \geq 0$ の範囲で曲線の下にある部分全体の面積である。

小問 (i)

$T(x)$ の積分で $u = 1/t$ と置換すると、$\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ である。u が 0 から x まで動くとき、t は ∞ から $1/x$ まで減少する。よって

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_{\infty}^{1/x} \frac{1}{1+t^{-2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = T_\infty - T(x^{-1}). \end{aligned}$$

（T_∞ は有限なので、0 から始まる積分はきちんと定まった積分であり、積分区間を分割してよい。）これが求める結果である。

小問 (ii)

導関数。商の微分法（quotient rule）により、$u \neq a^{-1}$ のとき

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

一方、

$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2u^2+u^2+a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

これを $1+u^2$ で割ると $\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ となり、示すべき式が得られる。

加法定理。$a > 0$、$0 < x < \frac{1}{a}$ とする。$0 \le u \le x$ では $1-au \ge 1-ax > 0$ であるから、v は区間全体で定義されて連続であり、さらに $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} > 0$ である。したがって v は $v(0) = a$ から $v(x) = \frac{x+a}{1-ax}$ まで増加する。

> **考えてみよう** $x < \frac{1}{a}$ であることはなぜ重要なのか。

もし x が $\frac{1}{a}$ に達すると、積分区間の内部で v が発散してしまい、置換は意味をなさなくなる。$x < \frac{1}{a}$ であれば、これは $[0,x]$ 上の滑らかで増加する変数変換である。

導関数についての結果は、まさに $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{1}{1+v^2}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ を意味している。よって

$$\begin{aligned} T(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} &= \int_a^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} \\ &= \int_0^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} - \int_0^a \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a). \end{aligned}$$

ここで T の引数はどちらも正なので、すべて定義されている。

1 つ目の帰結。$X = \frac{x+a}{1-ax}$ とおく。小問 (i) を x に、続いて a に適用すると

$$T(x^{-1}) = T_\infty - T(x) = T_\infty - T(X) + T(a) = T_\infty - T(X) + T_\infty - T(a^{-1}),$$

すなわち $T(x^{-1}) = 2T_\infty - T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a^{-1})$ である。

2 つ目の帰結。$b > 0$、$y > \frac{1}{b}$ が与えられたとし、$x = \frac{1}{y}$、$a = \frac{1}{b}$ とおく。すると $x > 0$、$a > 0$ であり、$y > \frac{1}{b}$ は $x < b = \frac{1}{a}$ と同値なので、前の結果が適用できる。分母と分子に by を掛けると

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{by}} = \frac{b+y}{by-1},$$

であり、$x^{-1} = y$、$a^{-1} = b$ であるから

$$T(y) = 2T_\infty - T\left(\frac{y+b}{by-1}\right) - T(b).$$

小問 (iii)

$T(\sqrt{3})$。最後の結果で $y = b = \sqrt{3}$ とする。$\sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ なので条件 $y > \frac{1}{b}$ は満たされる。このとき

$$\frac{y+b}{by-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3},$$

であるから $T(\sqrt{3}) = 2T_\infty - T(\sqrt{3}) - T(\sqrt{3})$、すなわち $3T(\sqrt{3}) = 2T_\infty$ となり

$$T(\sqrt{3}) = \tfrac{2}{3}T_\infty.$$

まず $T(1)$。小問 (i) で $x = 1$ とすると $T(1) = T_\infty - T(1)$ となるので、$T(1) = \frac{1}{2}T_\infty$ である。

> **考えてみよう** $x = a$ のとき $\frac{x+a}{1-ax}$ が 1 に等しくなるのは、a がどのような値のときか。

$\frac{2a}{1-a^2} = 1$、すなわち $a^2 + 2a - 1 = 0$ が必要であり、その正の解は $a = \sqrt{2} - 1$ である。

$T(\sqrt{2}-1)$。そこで加法定理で $x = a = \sqrt{2} - 1 > 0$ とする。条件 $x < \frac{1}{a}$ は $\sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} + 1$ となり、成り立つ。$a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ であるから

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} = 1,$$

よって $T(\sqrt{2}-1) = T(1) - T(\sqrt{2}-1)$ となり

$$T(\sqrt{2}-1) = \tfrac{1}{2}T(1) = \tfrac{1}{4}T_\infty.$$

検算

もちろん T の正体は arctan であり、$T_\infty = \frac{\pi}{2}$ である。解答では使うことを許されていなかったが、検算に使うことは十分できる。実際、$\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$、$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$ であ

る。積分を数値的に（シンプソン（Simpson）の公式で）計算すると $T_\infty \approx 1.570796$、$T(\sqrt{3}) \approx 1.047198$、$T(\sqrt{2}-1) \approx 0.392699$ となり、$\frac{2}{3}T_\infty$ および $\frac{1}{4}T_\infty$ と一致する。小問 (ii) の加法定理（addition formula）は、$x = \tan A$、$a = \tan B$ とおけば、おなじみの $\tan(A+B)$ の公式が姿を変えたものである。

よくある間違い

- $u = 1/t$ と置換した後、積分の上下端を入れ替えるのを忘れる。$\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ から出るマイナス符号こそが、$\int_\infty^{1/x}$ を $\int_{1/x}^\infty$ にひっくり返すものである。
- 小問 (iii) で $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ や arctan の性質をこっそり使ってしまう。問題はそれを禁じており、要点はすべてを小問 (i) と (ii) から導くことにある。
- 実際に用いる数について、条件 $x < \frac{1}{a}$ や $y > \frac{1}{b}$ を確かめない。

STEP のその先へ

関数を積分で定義し、その性質をすべてその定義から導くというのは、解析学（analysis）の講義で ln、exp、arctan、さらには π までも厳密に構成するときの方法である。ここでは π を単に $2T_\infty$ と定義してもよい。置換 $v = \frac{u+a}{1-au}$ はメビウス変換（Möbius transformation）であり、それが $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ を保つという事実は、円の回転を反映している。解析学の側面については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を、メビウス変換の幾何については Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の本）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。