解答例

STEP III 2017、第 5 問

純粋数学 • 極方程式で表された曲線

> **STEP III 2017、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q5

鍵となる考え方

曲線を θ を媒介変数として媒介変数表示（parametric form）する：$x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$。すると傾きは連鎖律（chain rule）から求まり、「直交する」という条件は「傾きの積が -1 である」という条件になる。最後の小問では、曲線族 $r = a(1+\sin\theta)$ が C 上のすべての点を通るので、直交条件は C 全体にわたって成り立つ。これにより、条件は f に関する一階微分方程式（first-order differential equation）に帰着する。

解答

傾き

曲線上では $x = f(\theta)\cos\theta, y = f(\theta)\sin\theta$ である。積の微分法（product rule）により θ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

連鎖律を用い、さらに（$\cos\theta \neq 0$ と仮定して）分子と分母を $\cos\theta$ で割ると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} = \frac{f'(\theta)\tan\theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta)\tan\theta}.$$

直交する曲線

交点では、二つの曲線は同じ θ をとる。$t = \tan\theta$ とおき、その点での値を f, f', g, g' と書く。どちらの接線（tangent）も鉛直でなければ、二曲線が直交するのは傾きの積が

-1 となるとき、かつそのときに限る：

$$(f't+f)(g't+g) = -(f'-ft)(g'-gt).$$

両辺を展開すると $f'gt$ と $fg't$ の項が打ち消し合い、

$$f'g't^2 + fg + f'g' + fgt^2 = 0 \iff (1+t^2)(f'g'+fg) = 0.$$

が残る。$1+t^2 = \sec^2\theta > 0$ であるから $f'(\theta)g'(\theta) + f(\theta)g(\theta) = 0$ が得られ、示すべきことが示された。

考えてみよう 一方の接線が鉛直である場合や $\cos\theta = 0$ の場合のように、傾きや $\tan\theta$ が存在しないときはどうなるか？

傾きの代わりに方向ベクトル（direction vector）を用いる。$r = f(\theta)$ の接線の方向は $(f'\cos\theta - f\sin\theta,\ f'\sin\theta + f\cos\theta)$ であり、g についても同様である。これらの内積（scalar product）は

$$(f'\cos\theta - f\sin\theta)(g'\cos\theta - g\sin\theta) + (f'\sin\theta + f\cos\theta)(g'\sin\theta + g\cos\theta) = f'g' + fg,$$

となる。交差項が打ち消し合い、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ となるからである。したがって、どの場合でも直交条件は同じである。

$f(\theta)$ を求める

$r = a(1+\sin\theta)$ に対しては $g'(\theta) = a\cos\theta$ である。

考えてみよう この条件は曲線どうしが交わる点でしか成り立たない。なぜ C 上のすべての点でこれを使えるのか？

C 上の任意の点をとり、その偏角を θ（$f(\theta) > 0, \sin\theta \neq -1$）とする。$a = f(\theta)/(1+\sin\theta) > 0$ と選べば、曲線族のうち、その点を同じ θ で通るものが得られる。仮定よりこの曲線は C と直交するので

$$f'(\theta)\, a\cos\theta + f(\theta)\, a(1+\sin\theta) = 0.$$

$a > 0$ で割ると、このようなすべての θ が

$$f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)(1+\sin\theta) = 0.$$

を満たす。$1-\sin\theta$ を掛け、$1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$ を用いると

$$\cos\theta\,[f'(\theta)(1-\sin\theta) + f(\theta)\cos\theta] = 0.$$

$\cos\theta \neq 0$ のところでは括弧の中が 0 になる。商の微分法（quotient rule）により、括弧の中は $f(\theta)/(1-\sin\theta)$ の導関数の $(1-\sin\theta)^2$ 倍である：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{f(\theta)}{1-\sin\theta}\right) = \frac{f'(\theta)(1-\sin\theta)+f(\theta)\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2} = 0.$$

よって区間 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ において、定数 k を用いて $f(\theta) = k(1-\sin\theta)$ となる。（同じことだが、$f'/f = -(1+\sin\theta)/\cos\theta = -\cos\theta/(1-\sin\theta)$ を変数分離（separation of variables）して解いてもよい。）曲線は $r = 4, \theta = -\frac{1}{2}\pi$ を通るので、連続性（continuity）より $k(1+1) = 4$、すなわち $k = 2$ である。$\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ でも同じ議論が成り立ち、$\theta = \frac{3}{2}\pi$ は $-\frac{1}{2}\pi$ と同じ方向であるから、やはり $k = 2$ となる。したがって

$$\boxed{f(\theta) = 2(1-\sin\theta)}$$

これもまたカージオイド（cardioid）であり、$r = 2(1+\sin\theta)$ を x 軸に関して折り返したものである。

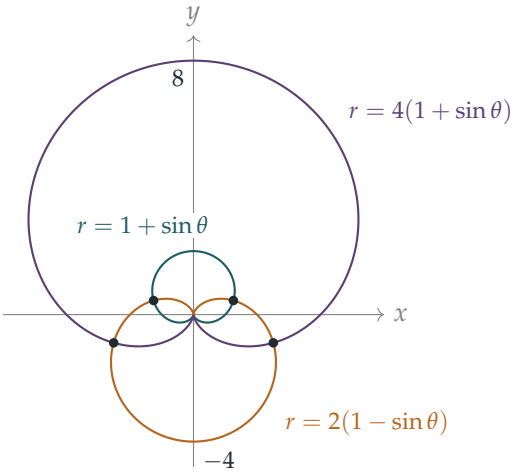
概形

曲線 $r = a(1+\sin\theta)$ は原点に尖点（cusp）をもち、y 軸に関して対称なカージオイドである。上は $(0, 2a)$ まで達し、x 軸とは $(\pm a, 0)$ で交わる。曲線 $r = 2(1-\sin\theta)$ は同じ形で下向きに開いたカージオイドである：尖点は原点にあり、x 軸とは $(\pm 2, 0)$ で交わり、下は $(0, -4)$ まで達する。

交点は $a(1+\sin\theta) = 2(1-\sin\theta)$ を解いて求まり、$\sin\theta = \frac{2-a}{2+a}$ となる：

- $a = 1$：$\sin\theta = \frac{1}{3}, r = \frac{4}{3}$ で、交点は $\left(\pm\frac{8\sqrt{2}}{9}, \frac{4}{9}\right)$；
- $a = 4$：$\sin\theta = -\frac{1}{3}, r = \frac{8}{3}$ で、交点は $\left(\pm\frac{16\sqrt{2}}{9}, -\frac{8}{9}\right)$。

三つの曲線はいずれも原点も通る。



検算

- $\theta = 0$ において曲線 $r = 2(1 - \sin\theta)$ は点 $(2, 0)$ にあり、$r = 2(1 + \sin\theta)$ も同じ点を通る。そこでは $f = 2, f' = -2, g = 2, g' = 2$ であるから $f'g' + fg = -4 + 4 = 0$ となり、確かに成り立っている。
- $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ において $f = 2(1 + 1) = 4$ であり、条件どおりである。
- $\left(\frac{8\sqrt{2}}{9}, \frac{4}{9}\right) \approx (1.257, 0.444)$ における接線が直交することをコンピュータで確認した。多数のランダムな a の値についても同様に確認した。

よくある間違い

- 直交条件を一つの交点でしか使わないこと。「各正の数 a について」という仮定の要点は、それによって条件が C 上のすべての点で成り立つことにある。
- $f(\theta)/(1 - \sin\theta)$ が $\theta = \frac{1}{2}\pi$ で定義されないことを忘れ、定数をどこで決めるかについて注意を怠ること。
- $r = 2(1 - \sin\theta)$ を上向きに開いた形に描くこと：$\theta = -\frac{1}{2}\pi$ で $r = 4$ であるから、この曲線は主に x 軸より下側にある。

STEP のその先へ

ある曲線族と至るところで直交する曲線族を、互いの**直交截線**（orthogonal trajectories）という。ここでは、カージオイド $r = a(1 + \sin\theta)$ と $r = b(1 - \sin\theta)$ がそのような組をなしている。この考え方は大学1年次の微分方程式に登場し、物理学でも、電気力線が等電位面（equipotentials）と直交するという形で再び現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、直交截線の求め方が扱われている。Needham の *Visual Complex Analysis*（ビジュアル複素解析）では、等角写像（conformal maps）がこのような曲線族をどのように生み出すかが示されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。