解答例

STEP III 2017、第 4 問

純粋数学 • 関数の幾何平均

> **STEP III 2017、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q4

鍵となる考え方

相乗平均（geometric mean）とは、通常の平均を指数関数（exponential）の肩に乗せたものにすぎない。すなわち、$\ln F(y)$ は区間 $[0, y]$ における $\ln f$ の平均値である。したがって、F の性質はすべて、対数の性質（底の変換（change of base）や $\ln(fg) = \ln f + \ln g$）と積分の線形性（linearity）を組み合わせることで得られる。(iv) の逆（converse）については、条件が積分を含む等式となり、これを微分すれば簡単な微分方程式（differential equation）に帰着する。

解答

以下では常に

$$\ln F(y) = \frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (y > 0),$$

と書く。これは定義の両辺の対数をとったものである。

小問 (i)

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ であるから、$\log_a$ が定義でき、$\ln a \neq 0$ である。底の変換公式より $\log_a f(x) = \dfrac{\ln f(x)}{\ln a}$ である。また、任意の実数 t に対して $a^t = \mathrm{e}^{t\ln a}$ である。よって

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{y}\int_0^y \log_a f(x)\,\mathrm{d}x} &= \exp\left(\ln a \cdot \frac{1}{y}\int_0^y \frac{\ln f(x)}{\ln a}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(y), \end{aligned}$$

となる。ここで、定数 $\frac{1}{\ln a}$ を積分の外に出し、$\ln a$ と約分した。これが求める結果である。（$a \neq 1$ という条件は、まさに $\ln a$ で割ることを可能にするためのものである。）

小問 (ii)

$f(x) > 0$ かつ $g(x) > 0$ であるから $h(x) > 0$ であり、H は定義でき、$\ln h(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$ である。積分の線形性より

$$\ln H(y) = \frac{1}{y}\int_0^y (\ln f(x) + \ln g(x))\,\mathrm{d}x = \ln F(y) + \ln G(y) = \ln(F(y)G(y)).$$

ln は単射（one-to-one）であるから、$H(y) = F(y)G(y)$ である。

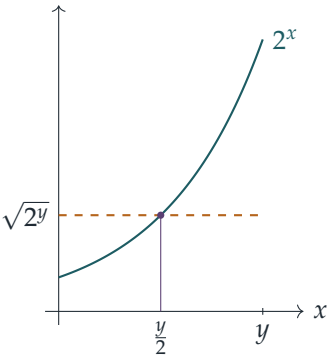
小問 (iii)

ここでは $f(x) = b^x > 0$ であり、$\ln f(x) = x \ln b$ であるから

$$\ln F(y) = \frac{1}{y}\int_0^y x \ln b\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\cdot\frac{y^2}{2}\ln b = \frac{y}{2}\ln b.$$

したがって $F(y) = \mathrm{e}^{\frac{y}{2}\ln b} = b^{y/2} = \sqrt{b^y}$ となり、示された。

下の図は、$b = 2$ の場合にこの結果が何を意味するかを示している。$[0, y]$ における 2^x の相乗平均は、中点 $\frac{y}{2}$ における 2^x の値に等しい。これは $\ln 2^x$ が一次関数であり、一次関数の平均値は中点での値に等しいからである。



小問 (iv)

問題文が暗に仮定しているように、f は連続（continuous）であると仮定する。これにより積分が存在し、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）が使える。$\phi(x) = \ln f(x)$ とおく。$f(x) > 0$ であるからこれは定義でき、しかも連続である。仮定 $F(y) = \sqrt{f(y)}$ は、対数をとると

$$\frac{1}{y}\int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\phi(y) \quad \text{すなわち} \quad \int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2}\phi(y) \qquad \text{任意の} y > 0. \qquad (*)$$

を意味する。

考えてみよう どうすれば積分を消せるだろうか。また、それは許されるだろうか。

y で微分する。微分積分学の基本定理より、$(*)$ の左辺は微分可能であり、その導関数は $\phi(y)$ である。よって右辺も微分可能であり、したがって $y > 0$ において $\phi(y) = \frac{2}{y} \times$ (左辺) も微分可能である。右辺に積の微分法（product rule）を用いて $(*)$ を微分すると

$$\phi(y) = \tfrac{1}{2}\phi(y) + \tfrac{y}{2}\phi'(y) \quad \Longrightarrow \quad y\,\phi'(y) - \phi(y) = 0.$$

$y > 0$ であるから y^2 で割ることができ、商の微分法（quotient rule）による導関数の形が現れる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\phi(y)}{y}\right) = \frac{y\phi'(y) - \phi(y)}{y^2} = 0.$$

よって $\phi(y)/y$ は区間 $y > 0$ 上で定数であり、これを k とおく（区間上で導関数が 0 である関数は、平均値の定理（mean value theorem）により定数である）。したがって $\ln f(x) = kx$ であり、

$$f(x) = \mathrm{e}^{kx} = b^x, \qquad \text{ただし} b = \mathrm{e}^k > 0.$$

これはすべての $x > 0$ で成り立つ。ただ一点 $x = 0$ での値はどの積分にも影響しないし、いずれにせよ連続性より $f(0) = 1 = b^0$ である。(iii) と合わせると、相乗平均が $\sqrt{f(y)}$ となる関数は、ちょうど b^x の形の関数であることがわかる。

検算

- (iii) で $b = 4$、$y = 2$ とすると、$\ln F(2) = \frac{1}{2}\int_0^2 x \ln 4\,\mathrm{d}x = \ln 4$ であるから $F(2) = 4 = \sqrt{4^2}$ となる。数値積分の結果とも一致する。
- (iv) で、b^x の形でない関数、たとえば $f(x) = 3 \cdot 2^x$ を試してみる。(ii) と (iii) より $F(y) = 3 \cdot 2^{y/2}$ である一方、$\sqrt{f(y)} = \sqrt{3} \cdot 2^{y/2}$ であるから、条件は当然成り立たない。実際、上の議論では $\phi(y)/y = \ln 2 + \frac{\ln 3}{y}$ となり、定数ではない。
- 小問 (i) と (ii) は、ランダムな正の関数、y の値、および 1 の両側の底 a について、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- (iv) で $(*)$ を微分する際に $\frac{y}{2}\phi(y)$ に積の微分法を使い忘れ、ϕ' の項がまるごと抜け落ちてしまう。

- (iii) だけから $f(x) = b^x$ と結論してしまう。(iii) は b^x がその性質をもつことを示すだけで、ほかの関数がもたないことは示していない。小問 (iv) はその逆であり、独立した議論が必要である。
- (i) で、$a \neq 1$ がどこで必要になるかを述べない。この条件こそが $\log_a$ を意味あるものにし、$\ln a \neq 0$ を保証する。

STEP のその先へ

連続的な相乗平均は $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$ の積分版であり、凹関数（concave function）ln に対するイェンセンの不等式（Jensen's inequality）から、それが通常の平均 $\frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x$ を超えないことがわかる。これが連続版の相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）である。小問 (iv) は、関数方程式（functional equation）を微分方程式に変換して解く小さな例であり、微分可能性に注意を払う必要がある。解析学（analysis）の講義では、微分積分学の基本定理によってこうした変換が許されるのはどのような場合かを正確に学ぶ。厳密な背景については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。