解答例

STEP III 2017、第 3 問

純粋数学 • 多項式の根

> **STEP III 2017、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q3

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.4 節「四次方程式を解く」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/quartic.html

鍵となる考え方

任意の多項式の係数はその根（root）の対称式（symmetric function）であるから、三次方程式の係数 A はその 3 つの根の和に負号をつけたものであり、その和は α、β、γ、δ のよく知られた対称式である。具体的に与えられた四次式（quartic）については、三次方程式が整数の根をもつので、完全に因数分解できる。$\alpha\beta+\gamma\delta$ がわかれば、四次式を 2 つの二次因数、すなわち α、β を根とするものと γ、δ を根とするものに分けることができ、残りの係数によってそれらの因数が決まる。

解答

A を求める

以下では一貫して、四次式に対する解と係数の関係（Vieta's relations）を用いる：

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p, \qquad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q,$$
$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r, \qquad \alpha\beta\gamma\delta=s.$$

三次方程式はモニック（monic、最高次の係数が 1）であり、根は $y_1=\alpha\beta+\gamma\delta$、$y_2=\alpha\gamma+\beta\delta$、$y_3=\alpha\delta+\beta\gamma$ であるから、

$$y^3+Ay^2+\cdots=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3),$$

となり、y^2 の係数を比較すると $A = -(y_1 + y_2 + y_3)$ を得る。ところが $y_1 + y_2 + y_3$ は、異なる2つの根の積6個をそれぞれちょうど1回ずつ含むので、q に等しい。したがって

$$A = -q.$$

小問 (i)

$p = 0$、$q = 3$、$r = -6$、$s = 10$ のとき、三次方程式の係数は

$$A = -3, \qquad pr - 4s = -40, \qquad 4qs - p^2 s - r^2 = 120 - 0 - 36 = 84,$$

であるから、三次方程式は

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = 0.$$

である。整数の根はどれも 84 の約数である。小さい約数を試すと、$y = 2$ のとき $8 - 12 - 80 + 84 = 0$ となるので、$y - 2$ は因数である：

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = (y - 2)(y^2 - y - 42) = (y - 2)(y - 7)(y + 6).$$

根は 2、7、-6 であり、最大のものは 7 であるから、

$$\alpha\beta + \gamma\delta = 7.$$

小問 (ii)

展開すると

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta,$$

となり、これは2つずつの積6個の和から $\alpha\beta$ と $\gamma\delta$ を除いたものである。よって

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = q - (\alpha\beta + \gamma\delta) = 3 - 7 = -4.$$

次に、$\alpha\beta$ と $\gamma\delta$ は和が 7、積が $\alpha\beta\gamma\delta = s = 10$ である。したがってこれらは

$$t^2 - 7t + 10 = (t - 5)(t - 2) = 0,$$

の根であり、$\alpha\beta > \gamma\delta$ であるから $\alpha\beta = 5$、$\gamma\delta = 2$ を得る。

小問 (iii)

$u = \alpha + \beta$ とおく。$p = 0$ であるから4つの根の和は0であり、$\gamma + \delta = -u$ となる。小問 (ii) より $-u^2 = -4$ であるから、$u = \pm 2$ である。

考えてみよう u の符号はどちらが正しいか。また、それはどうすればわかるか。

まだ r を使っていない。3 つずつの積 4 個を 2 組にまとめると、

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=5(-u)+2u=-3u.$$

これが $-r=6$ に等しいので、$u=-2$ である。（もう一方の符号だと $r=+6$ となり、別の四次式になってしまう。）よって

$$\alpha+\beta=-2,\quad \alpha\beta=5,\qquad \gamma+\delta=2,\quad \gamma\delta=2.$$

したがって α、β は $x^2+2x+5=0$ の根であり $x=-1\pm 2\mathrm{i}$、γ、δ は $x^2-2x+2=0$ の根であり $x=1\pm\mathrm{i}$ である。ゆえに四次方程式

$$x^4+3x^2-6x+10=(x^2+2x+5)(x^2-2x+2)=0$$

の根は

$$x=-1+2\mathrm{i},\quad -1-2\mathrm{i},\quad 1+\mathrm{i},\quad 1-\mathrm{i}.$$

である。

検算

- $(x^2+2x+5)(x^2-2x+2)$ を展開すると、x^3 の項は打ち消し合い、$x^4+3x^2-6x+10$ となって、確かに与えられた四次式に一致する。
- これらの根について、$\alpha\gamma+\beta\delta$ と $\alpha\delta+\beta\gamma$ は（順序はともかく）三次方程式の残りの 2 つの根 2 と -6 になるはずである。その和は $q-7=-4=2+(-6)$ であり、確かにそうなっている。
- 公式 $A=-q$ は、根を無作為に選んだ複素数とする四次式 1000 個についても、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- $A=q$ としてしまう：y^2 の係数は根の和に**負号をつけたもの**である。
- $u=\pm 2$ で止めて、両方の可能性を答えてしまう：$r=-6$ と矛盾しない符号は一方だけである。
- 実数の根を期待してしまう：この四次式はすべての実数 x に対して正であるから、4 つの根はすべて虚数である。

STEP のその先へ

ここでの三次方程式は四次式の**分解三次方程式**（resolvent cubic）であり、フェラーリ（Ferrari）の解法の核心をなす：任意の四次方程式を解くことは、三次方程式を解き、続いて二次方程式を解くことに帰着される。これがうまくいく理由はガロア理論（Galois theory）によって説明される。ガロア理論は、根の置換（permutation）が $\alpha\beta + \gamma\delta$ のような式にどのように作用するかを調べる理論である（3つの式はそれぞれ、24個の置換のうち8個からなる部分群（subgroup）によって固定される）。これらの考え方を学び始めるには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。