解答例

STEP III 2017、第 2 問

純粋数学 • 複素平面上の回転

> **STEP III 2017、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q2

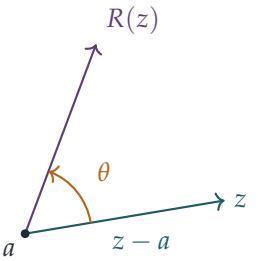
鍵となる考え方

a を中心とする回転（rotation）は、原点を a に移して考えると最も記述しやすい。すなわち、a を引き、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を掛け、再び a を足せばよい。したがって、どの回転も $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z + k$ の形をしており、逆にこのような写像は（$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 1$ であれば）その不動点（fixed point）を中心とする角 α の回転である。そこで SR を特定するには、2 つの式を合成（composition）し、不動点を求めればよい。半角（half-angle）を用いた因数分解 $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\frac{1}{2}\alpha$ によって、答えは求められている形になる。

解答

小問 (i)

中心 a から P へのベクトルは $z - a$ である。a を中心に反時計回りに θ だけ回転させると、このベクトルは θ だけ回転する。これは複素数では $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を掛けることにあたり、$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$ であるから長さは変わらない。



よって P の像 w は $w-a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a)$ を満たす。すなわち

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),$$

となり、これが示すべきことであった。同様に $S(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}z+b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})$ である。

小問 (ii)

まず R を、次に S を施す。

$$\begin{aligned}SR(z)&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)+b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z+a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}).\end{aligned}$$

小問 (i) より、c を中心とする角 $\theta+\phi$ の回転は $z\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z+c(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)})$ である。z の係数はすでに一致しているので、SR がこの回転となるのは、ちょうど

$$c(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)})=a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}). \qquad (*)$$

が成り立つときである。

考えてみよう 括弧 $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ を半角の正弦に変えるにはどうすればよいか。

因数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$ をくくり出して、括弧の中を対称な形にする。

$$1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2})=-2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

これを $\alpha=\theta+\phi$、θ、ϕ に対して用いると、式 $(*)$ は

$$-2\mathrm{i}\,c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)=-2\mathrm{i}\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta-2\mathrm{i}\,b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

となる。両辺を $-2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}$（これは決して 0 にならない）で割ると

$$c\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)=a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta+b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

を得る。$\theta+\phi\neq 2n\pi$ ならば $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)\neq 0$ であるから、これにより c がただ 1 つに定まり、その c に対して写像 SR は c を中心とする角 $\theta+\phi$ の回転となる。これが示すべき結果である。（この条件は重要である。$\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)=0$ のときは、一般に回転の中心となる不動点が存在しない。）

$\theta+\phi=2\pi$ の場合。 このとき $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}=1$ かつ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}SR(z)&=z+a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+b(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\\&=z+a(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-1)+b(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\\&=z+(b-a)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}).\end{aligned}$$

よって SR は $(b-a)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$ による**平行移動**（translation）であり、その移動距離は $2|b-a|\,|\sin\frac{1}{2}\theta|$ である。$a=b$ のとき（同じ点を中心に θ 回転させ、続けて $2\pi-\theta$ 回転させる場合）、または θ が 2π の倍数のときには、これは恒等写像（identity）となる。それ以外の場合は、不動点をもたない真の平行移動である。

小問 (iii)

SR の式において (a,θ) と (b,ϕ) の役割を入れ替えると

$$RS(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z+b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})+a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

となる。どちらの写像も z に $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}$ を掛けるので、$RS=SR$ となるのはちょうど定数項が一致するときである。その差は

$$\begin{aligned}SR(z)-RS(z)&=a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1)+b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\\&=(b-a)(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}).\end{aligned}$$

である。積が 0 になるのはいずれかの因数が 0 のときに限るので、$RS=SR$ となるための必要十分条件は次のいずれかが成り立つことである。

- $a=b$（2 つの回転の中心が同じ）、または
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=1$、すなわち θ が 2π の倍数で、R が恒等写像である、または
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=1$、すなわち ϕ が 2π の倍数で、S が恒等写像である。

言葉で言えば、2 つの真の回転が可換（commute）となるのは、中心を共有するときに限る。

検算

- $a=b$ のとき、(ii) の式は $c\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)=a\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\frac{1}{2}\theta+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\frac{1}{2}\phi\right)$ を与える。括弧を展開すると $\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\phi+\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\phi=\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$ となる（虚部は打ち消し合う）ので、当然そうあるべきとおり $c=a$ である。
- $\phi=0$（S が恒等写像）のとき、$c\sin\frac{1}{2}\theta=a\sin\frac{1}{2}\theta$ であるから $c=a$ である。
- $a=0$、$b=1$、$\theta=\phi=\frac{1}{2}\pi$ とする。このとき $R(z)=\mathrm{i}z$、$S(z)=\mathrm{i}z+1-\mathrm{i}$ であるから $SR(z)=-z+1-\mathrm{i}$ となり、これは $\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$ を中心とする半回転である。式からは $c\cdot 1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$ が得られ、一致する。
- 3 つの結果はすべて、数千通りの無作為な中心・角・点について、式を使わずに幾何的に（絶対値と偏角によって）回転させる方法でコンピュータでも確認した。誤差は 10^{-12} 未満であった。

よくある間違い

- 合成の順序を間違える。SR は R を先に施すことを意味するので、$R(z)$ を S に代入する。
- $1 - e^{i(\theta+\phi)}$ で割る際に、それが 0 でないのはまさに $\theta + \phi \neq 2n\pi$ だからであることを述べ忘れる。
- (iii) で、一方の回転が恒等写像であるという自明な場合を忘れる。

STEP のその先へ

$|\alpha| = 1$ を満たす写像 $z \mapsto \alpha z + \beta$ は、平面の向きを保つ等長変換（orientation-preserving isometry）とちょうど一致し、これらは群（group）をなす。すなわち、回転と平行移動を合わせたものは合成について閉じている。小問 (iii) は、この群が可換でないという事実の小さな一例であり、交換子（commutator）$RSR^{-1}S^{-1}$ は平行移動になることがわかる。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素数の掛け算の幾何学的な見方）はこの視点を見事に展開しており、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は群論を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。