解答例

STEP III 2017、第 13 問

確率・統計 ・ 期待値と分散

STEP III 2017、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s3-q13

鍵となる考え方

$X - x$ を $(X - \mu) + (\mu - x)$ と書く。第 1 項の平均（mean）は 0 であるから、2 乗して期待値（expectation）をとると交差項が消える。残るのは分散（variance）に定数を加えたものであり、これは「$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \mu^2$」と同じ恒等式である。一様分布（uniform distribution）の場合、Y は X の関数であるが一対一（one-to-one）ではない。そのため、Y の確率密度関数（density）を求めるには、累積分布関数（cumulative distribution function）を経由するのが最も確実である。

解答

関数 V

任意の固定された数 x に対して、

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(x) = \mathrm{E}((X-x)^2) &= \mathrm{E}(((X-\mu)+(\mu-x))^2) \\ &= \mathrm{E}((X-\mu)^2) + 2(\mu-x)\,\mathrm{E}(X-\mu) + (\mu-x)^2 \\ &= \sigma^2 + (x-\mu)^2\end{aligned}$$

となる。ここで期待値の線形性（linearity of expectation）（$\mu - x$ は定数である）と $\mathrm{E}(X - \mu) = 0$ を用いた。

Y の平均

$\mathrm{V}(x) = \sigma^2 + (x - \mu)^2$ はすべての実数 x について成り立つから、$x = X$ とおいてよい：

$$Y = \mathrm{V}(X) = \sigma^2 + (X-\mu)^2.$$

考えてみよう V は期待値によって定義されたのだから、$\mathrm{V}(X)$ は単なる数ではないのか？

そうではない。V は実変数の普通の関数（x の二次関数（quadratic））である。期待値は x を固定したままとったものである。この二次関数に確率変数（random variable）X を代入すると、新しい確率変数が得られる。したがって

$$\mathrm{E}(Y) = \sigma^2 + \mathrm{E}((X-\mu)^2) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2,$$

となり、これが $(*)$ である。

一様分布の場合

X が $[0,1]$ 上の一様分布に従うとき、$\mu = \frac{1}{2}$、$\sigma^2 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ である。よって

$$\mathrm{V}(x) = \tfrac{1}{12} + (x - \tfrac{1}{2})^2 = x^2 - x + \tfrac{1}{3}.$$

Y の分布。 このとき $Y = \frac{1}{12} + (X - \frac{1}{2})^2$ である。X が $[0,1]$ を動くと $|X - \frac{1}{2}|$ は $[0, \frac{1}{2}]$ を動くので、Y のとる値は $[\frac{1}{12}, \frac{1}{12} + \frac{1}{4}] = [\frac{1}{12}, \frac{1}{3}]$ の範囲にある。

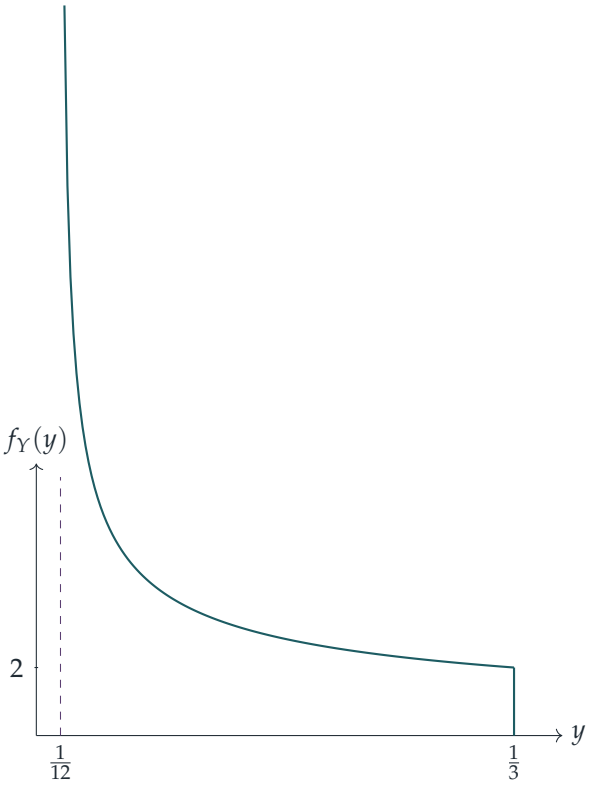
写像 $X \mapsto Y$ は二対一（two-to-one）である（点 $\frac{1}{2} \pm h$ は同じ Y を与える）から、分布関数（distribution function）を用いて考える。$\frac{1}{12} \le y \le \frac{1}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y \le y) &= \mathrm{P}((X-\tfrac{1}{2})^2 \le y - \tfrac{1}{12}) = \mathrm{P}(\tfrac{1}{2} - s \le X \le \tfrac{1}{2} + s), \quad \text{ただし} s = \sqrt{y - \tfrac{1}{12}}, \\ &= 2s = 2\sqrt{y - \tfrac{1}{12}}\end{aligned}$$

となる。なぜなら $0 \le s \le \frac{1}{2}$ であるから、この区間は $[0,1]$ に含まれ、長さは $2s$ だからである。（$y = \frac{1}{3}$ のときこれは $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ となり、当然そうあるべき値である。）微分すると、

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y - \frac{1}{12}}} \quad (\text{ただし} \tfrac{1}{12} < y \le \tfrac{1}{3}, \qquad f_Y(y) = 0 (\text{それ以外のとき})$$

を得る。この確率密度関数は $y = \frac{1}{12}$ の近くで有界ではないが、それでも可積分（integrable）である。$(X - \frac{1}{2})^2$ は $X = \frac{1}{2}$ の近くで平らなので、Y は最小値の近くの値をとる可能性が最も高い。



$(*)$ **の確認。** 確率密度関数を用い、$t = y - \frac{1}{12}$ と置換すると（t は 0 から $\frac{1}{4}$ まで動く）、

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{1/12}^{1/3} \frac{y}{\sqrt{y - \frac{1}{12}}}\,\mathrm{d}y = \int_0^{1/4} (t^{1/2} + \tfrac{1}{12}t^{-1/2})\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{2}{3}t^{3/2} + \tfrac{1}{6}t^{1/2}\right]_0^{1/4}$$
$$= \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{6}.$$

$2\sigma^2 = 2\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ であるから、これは $(*)$ と一致する。

検算

- 確率密度関数の積分は 1 になる：$\int_0^{1/4} t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$。
- $\mathrm{V}(x)$ は $x = \mu$ で最小となり、最小値は σ^2 である。つまり、平均とは期待二乗距離を最小にする点である。一様分布の場合 $\mathrm{V}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$ であり、これは Y の値域の下端である。
- 400 000 個の一様乱数を用いたコンピュータシミュレーションでは、Y の標本平均は約 0.1667 となり、$\frac{1}{6}$ と一致した。

よくある間違い

- $\mathrm{V}(X)$ を定数 σ^2 とみなしてしまい、$\mathrm{E}(Y) = \sigma^2$ を得る。
- 一対一の場合の変数変換（change of variable）の公式 $f_Y = f_X \left|\mathrm{d}x/\mathrm{d}y\right|$ を一方の枝だけに適用してしまい、正しい確率密度関数の半分を得る。$X = \frac{1}{2} + s$ と $X = \frac{1}{2} - s$ の両方が寄与する。

STEP のその先へ

$\mathrm{V}(x) = \sigma^2 + (x - \mu)^2$ は最も単純なバイアス・バリアンス分解（bias–variance decomposition）である。ある量を x で推定するとき、平均二乗誤差（mean squared error）は、データのばらつきと偏り（bias）の 2 乗との和に分解される。結果 $\mathrm{E}(Y) = 2\sigma^2$ は、X の独立（independent）な 2 つのコピーの間の期待二乗距離が $2\sigma^2$ であることを述べている。統計学者はこの事実を繰り返し用いる。たとえば、標本分散（sample variance）がなぜ $n - 1$ で割るのかを説明するときである。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、これら両方の考え方に加え、確率変数の単調（monotonic）でない関数の確率密度関数の求め方も扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。