解答例

# STEP III 2017、第 11 問

力学 ・ 運動量保存則

> **STEP III 2017、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 10.3 節「**ロケットと大砲**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/rockets.html

## 鍵となる考え方

系には水平方向の外力がはたらかないので、各発射において水平方向の運動量（momentum）は保存される。地面に対する速さが $v - V$ という一見奇妙な形をしているが、実は単純なことを述べている。すなわち、発射体はつねに**台車に対して**速さ $v$ で飛び出すのである。運動エネルギー（kinetic energy）については、毎回すべてを一から計算し直すのではなく、$(*)$ を用いて 1 回の発射におけるエネルギーの変化を簡単にし、それから足し合わせればよい。

## 解答

台車、砲、発射体を一直線上を運動する質点としてモデル化し、前向き（台車の進む向き）を正とする。台車の速さが $V$ のときに発射された発射体の速度は $-(v - V) = V - v$、すなわち台車に対する相対速度（relative velocity）は $-v$ である。発射は系の内部で起こり、線路はなめらかであるから、各発射において水平方向の全運動量は保存される。

### 小問 (i)

発射前はすべてが静止しているので、運動量は 0 である。$V = 0$ であるから、各発射体は速度 $-v$ で飛び出し、台車（質量 $M$）は速さ $u$ で前進する：

$$Mu - nmv = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{nmv}{M}.$$

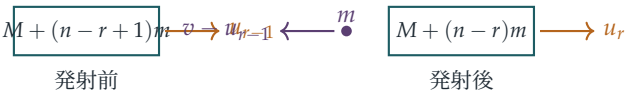
系ははじめ運動エネルギーをもたないので、得られたエネルギーは

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\left(1 + \frac{nm}{M}\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

**小問 (ii)**

$r$ 回目の発射を考える。その直前、台車は未発射の発射体を $n-r+1$ 個載せているので、運動している質量は $M+(n-r+1)m$ で、速さは $u_{r-1}$ である。直後には、質量 $M+(n-r)m$ が速さ $u_r$ で運動し、質量 $m$ の発射体 1 個が速度 $u_{r-1}-v$ をもつ。それ以前に発射された発射体は影響を受けないので、考慮から外してよい。




運動量保存則（conservation of momentum）より

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

左辺を $\big(M+(n-r)m\big)u_{r-1} + mu_{r-1}$ と書く。すると $mu_{r-1}$ の項が打ち消し合い、

$$\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv, \qquad \text{よって} \qquad u_r - u_{r-1} = \frac{mv}{M+(n-r)m},$$

が残る。これが $(*)$ である。

$(*)$ を $r=1,\ldots,n$ について足し合わせると、左辺は隣り合う項が打ち消し合う和（telescoping sum）となり、$u_0=0$ であるから

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m}.$$

各分母は $M+(n-r)m \geq M$ を満たすので、各項は $\dfrac{mv}{M}$ 以下である。$n>1$ より $(n-1)m>0$ となるので、$r=1$ では不等号は狭義である。したがって

$$u_n < n\cdot\frac{mv}{M} = u.$$

**考えてみよう** なぜ 1 つずつ発射するほうが不利なのだろうか？

初期の発射では、砲は台車だけでなく、まだ載っているすべての発射体も押さなければならないので、1 発ごとの速さの増加は小さくなる。$r=n$ の項（最後の 1 発で、もう何も載っていない）だけが、同時発射の場合の 1 発分の寄与と一致する。

### 小問 (iii)

$r$ 回目の発射では、速度が変化するのは台車（残りの積荷を含む）と、いま発射された発射体だけである。よって

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1}-v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r^2-u_{r-1}^2) + \tfrac{1}{2}m\big[(v-u_{r-1})^2-u_{r-1}^2\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1})(u_r+u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}m(v^2-2vu_{r-1}). \end{aligned}$$

$(*)$ より $\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$ であるから、第 1 項は $\frac{1}{2}mv(u_r+u_{r-1})$ である。したがって

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}mvu_r + \tfrac{1}{2}mvu_{r-1} + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} \\ &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r-u_{r-1}), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

これを $r=1,\dots,n$ について足し合わせ、$K_0=0$ と $u_0=0$ を用いると、両辺とも隣り合う項が打ち消し合う：

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_n-u_0) = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n.$$

最後に、小問 (i) と比較する。$u = nmv/M$ であるから

$$K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv\,u.$$

小問 (ii) より $u_n < u$ であり、$u>0$ かつ $n>1$ であるから $u<nu$ である。$mv>0$ なので

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmvu = K.$$

よって $K_n < K$ である。つまり、1 つずつ発射すると、解放される運動エネルギーは少なくなる。

## 検算

- $n=3$、$M=10$、$m=1$、$v=1$ とする。このとき $u=0.3$ であり、一方 $(*)$ からは $u_3 = \frac{1}{12}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10} = \frac{181}{660} \approx 0.274$ が得られ、予想どおり小さい。エネルギーは $K=1.95$、$K_3 = \frac{2161}{1320} \approx 1.637$ である。
- $n$、$M$、$m$、$v$ を無作為に数千通り選び、各発射の直後におけるすべての物体の運動量と運動エネルギーを直接計算すると、$(*)$ および $K_n$ の式と完全に一致する。このことはコンピュータで確認した。

- 極限の場合：$m \ll M$ ならば、$(*)$ の各項は $mv/M$ に近いので $u_n \approx u$ となり、どちらのエネルギーも $\frac{1}{2}nmv^2$ に近い。台車が非常に重いときは、発射の仕方はほとんど影響しない。

## よくある間違い

- 未発射の発射体が台車とともに運動していることを忘れ、$r$ 回目の発射の前の質量として $M + (n - r + 1)m$ ではなく $M$ を用いてしまう。
- 発射体の速度を $u_{r-1} - v$ ではなく $-v$ としてしまう。問題文では、地面に対する発射体の速さは $v$ ではなく $v - V$ と定められている。
- $K_r - K_{r-1}$ に、それ以前の発射体の運動エネルギーを含めてしまう。それらは影響を受けず、打ち消し合う。

## STEP のその先へ

これはロケットの運動の離散版である。$n$ 回の発射を連続的な噴射の流れに置き換えると、$u_n$ の和は積分になり、ツィオルコフスキー（Tsiolkovsky）のロケット方程式（rocket equation）$\Delta u = v \ln(m_0/m_1)$ が得られる。ロケットは 1 つずつ発射する台車と同じ立場にある。燃料をすべて一瞬で燃やすことはできないので、小問 (ii) で明らかになった代償を払うことになる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、質量が変化する系とロケットが丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。